**إختر الإجابة الصحيحة:**

**(١)** إذا كانت جـ = (−١ , ٦ , −٥) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(ك−٢ , −١ , م+٣) ، ب(٢ , ن−٧ , −٢) فإن ك+م + ن = .....

(أ) ٢ (ب) ٧ (ج) −٤ (د) ٥

---

**(٢)** إذا كان $\vec{أ}$ = ($\frac{١}{٢}$ , $\frac{٣}{٤}$ , ك) متجه وحدة فإن ك = ........

(أ) $\frac{±٣}{٤}$ (ب) ± $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ (ج) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{١}{٥}$

---

**(٣)** إذا كان $\vec{أ}$ = (−١ , ٤ , ك) ، $\vec{ب}$ = ٢$\vec{س}$+٢$\vec{ص}$ + $\vec{ع}$ وكان طول $\overline{أب}$= $\sqrt{٧٧}$ فإن إحدى قيم ك هى .....

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٩

---

**(٤)** معادلة الكرة التى مركزها (٢ , −٣ , ١) و طول نصف قطرها ٢$\sqrt{٥}$ هى ........

(أ) (س−٢)$^{٢}$+(ص+٣)$^{٢}$+(ع− ١)$^{٢}$=٢$\sqrt{٥}$

(ب) (س+٢)$^{٢}$+(ص−٣)$^{٢}$+ (ع + ١)$^{٢}$=٢٠

(ج) (س−٢)$^{٢}$+(ص+٣)$^{٢}$+(ع− ١)$^{٢}$=٢٠

(د) (س−٢)$^{٢}$+(ص+٣)$^{٢}$+(ع− ١)$^{٢}$= ٥

---

**(٥)** الصورة القياسية لمعادلة الكرة التى مركزها (٢ , −٣ , ٤) و تمس المستوى سص هى .......

(أ) (س−٢)$^{٢}$+(ص+٣)$^{٢}$+(ع −٤)$^{٢}$=٤

(ب) (س−٢)$^{٢}$+(ص+٣)$^{٢}$+(ع− ٤)$^{٢}$=٩

(ج) (س−٢)$^{٢}$+(ص+٣)$^{٢}$+(ع− ٤)$^{٢}$=١٦

(د) (س+٢)$^{٢}$+(ص−٣)$^{٢}$+(ع + ٤)$^{٢}$=١٦

---

**(٦)** إذا كانت ٣س$^{٢}$ + ٣ص$^{٢}$ + ٣ع$^{٢}$ +١٨س − ١٢ص + ٣٠ع− ٢٤ = ٠ فإن مركزها يساوى ........

(أ) (٣ ، −٢ ، ٥) (ب) (−٣ ، ٢ ، −٥) (ج) (٩ ، −٦ ، ١٥) (د) (−٩ ، −٦ ، −١٥)

---

**(٧)** إذا كانت س$^{٢}$ + ص$^{٢}$+ ع$^{٢}$− ٤ك س + ٤ ص −٨ع+ ٢ك = ٠ معادلة كرة طول قطرها ٤$\sqrt{٥}$ حيث ك ∈ ح$^{+}$ فإن ك =....

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

---

**(٨)** إذا كانت النقطة (−٢ ، ٤ ، م) تقع على الكرة (س +٢)$^{٢}$ + (ص − ١)$^{٢}$ +(ع− ٣)$^{٢}$ = ٢٥ فإن م = ......

(أ) ٦ (ب) ٧ (ج) ٨ (د) ٩

**(٩)** إذا قطع محور السينات الكرة التى مركزها ( ٣ ، −٤ ، ١٢) و طول نصف قطرها ١٣ وحدة طول فى النقطتين ﺃ ، ب فإن طول $\overline{\text{ﺃب}}$ = ......

ﺃ ٣ 　 ب ١٢ 　 ج ٨ 　 د ٦

---

**(١٠)** إذا كان ﺃ ب جـ مثلث فيه ﺃ (١ ، ٢ ، ٣) ، ب ( ٠ ، ١ ، ٢) ، جـ ( ٢ ، ١ ، ٠) فإن طول المتوسط المرسوم من الرأس ﺃ يساوى .......

ﺃ $\sqrt{٥}$ 　 ب ٢$\sqrt{٥}$ 　 ج ٥ 　 د ١٠

---

**(١١)** إذا كان $\overline{\text{ﺃب}}$ قطر فى الدائرة (س−٥)$^{٢}$ + (ص + ٢)$^{٢}$ + (ع− ١)$^{٢}$ = ٢٥ حيث ﺃ ( ٨ ، −١ ، ٢) فإن ب هى .....

ﺃ (٢ ، −٣ ، ١) 　 ب ( ١٠ ، −٤ ، ٥) 　 ج ( ٢ ، −٣ ، ٠) 　 د (١٠ ، ٣ ، ٦)

---

**(١٢)** إذا كان $\overrightarrow{\text{ﺃ}}$ = (−١ , ٤ , ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٢$\overrightarrow{\text{س}}$ + ٢$\overrightarrow{\text{ص}}$ + $\overrightarrow{\text{ع}}$ فإن مركبة $\overrightarrow{\text{ﺃ}}$ فى إتجاه $\overrightarrow{\text{ب}}$ = .......

ﺃ $\frac{٨}{٣}$ 　 ب $\frac{٧}{٣}$ 　 ج $\frac{١}{٣}$ 　 د ٨

---

**(١٣)** إذا كان $\overrightarrow{\text{ﺃ}}$ = (١ , −١ , ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٠ , ٢ , −٣) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (−٢ , ١ , ٠) فإن ‖ ٣ $\overrightarrow{\text{ﺃ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ + $\overrightarrow{\text{جـ}}$ ‖=....

ﺃ ٨$\sqrt{٣}$ 　 ب ١١ 　 ج ١٢ 　 د ٧$\sqrt{٢}$

---

**(١٤)** طول العمود المرسوم من النقطة (−٢ , −٣ , ١)على محور السينات يساوى .......

ﺃ ٢ 　 ب $\sqrt{١٣}$ 　 ج $\sqrt{١٠}$ 　 د ٥

---

**(١٥)** إذا كان $\overrightarrow{\text{ﺃ}}$ = (−٧ , ٣ , ١٠) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (−٤ , −١ , −٢)فإن متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{ﺃب}}$ = ......

ﺃ ($\frac{٣}{١٣}$ , $\frac{٤}{١٣}$ , $\frac{١٢}{١٣}$) 　 ب ($\frac{٣}{١٣}$ , $\frac{-٤}{١٣}$ , $\frac{-١٢}{١٣}$) 　 ج ($\frac{-٣}{١٣}$ , $\frac{٤}{١٣}$ , $\frac{١٢}{١٣}$) 　 د ($\frac{-٣}{١٣}$ , $\frac{-٤}{١٣}$ , $\frac{-١٢}{١٣}$)

---

**(١٦)** إذا كان $\overrightarrow{\text{ﺃ}}$ = (١ , ٢ , −٤) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (١ , ١ , ك−١) وكان ‖ $\overrightarrow{\text{ﺃ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ ‖= ٧ وحدة طول حيث ∋ ص$^{+}$ فإن ك = .....

ﺃ ١٠ 　 ب ٨ 　 ج ١١ 　 د ١٢

---

**(١٧)** إذا كان $\overrightarrow{\text{ﺃ}}$ = ٢$\overrightarrow{\text{س}}$ + ٣$\overrightarrow{\text{ص}}$ + ك$\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = −٦$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٤$\overrightarrow{\text{ص}}$ + ٤$\overrightarrow{\text{ع}}$ وكان $\overrightarrow{\text{ﺃ}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{ب}}$ فإن ك = .......

ﺃ ٤ 　 ب ٦ 　 ج ٨ 　 د ١٠

**(١٨)** إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٢جتاهـ , لـو٥ س , جاهـ) ، $\overrightarrow{ب}$ = (جتاهـ , لـو٣ ٢٧ , ٢جاهـ) وكان $\overrightarrow{أ}$ • $\overrightarrow{ب}$ = ١١

فإن س = ....

(أ) ٢٥ (ب) ١٢٥ (ج) ٦٢٥ (د) ٥

---

**(١٩)** إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٤ , ك , ٦) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ , ٢ , م) وكان $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ فإن ك + م = ......

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) −١ (د) ٧

---

**(٢٠)** إذا كانت $\theta$ هى قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ = (−٢ , −٦ , ١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ , ٦ , −١) فإن $\theta$ = ...

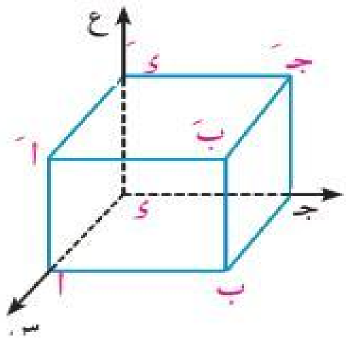
(أ) صفر (ب) ٦٠° (ج) ١٢٠° (د) ١٨٠°

---

**(٢١)** إذا كان أ ب ج مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٨سم فإن $\overrightarrow{ب أ}$ • $\overrightarrow{ج ب}$ = ......

(أ) −٣٢√٣ (ب) −٣٢ (ج) ٣٢√٣ (د) ٣٢

---

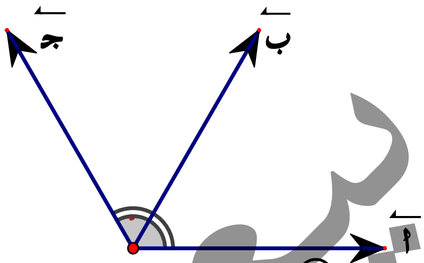



**(٢٢)** فى الشكل المقابل : إذا كان أ ب ج د أَ بَ جَ دَ مكعب طول ضلعه ٢ وحدة طول فإن $\overrightarrow{أبَ}$ • $\overrightarrow{بدَ}$ = .........

(أ) ١ (ب) −١

(ج) −٤ (د) $\frac{-١}{٢}$

---




**(٢٣)** فى الشكل المجاور إذا كان $\overrightarrow{ب}$ ينصف الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ج}$ حيث

$\overrightarrow{أ}$ = (١ , ٢ , −١)، $\overrightarrow{ب}$ = (٦ , ك , ٠)، $\overrightarrow{ج}$ = (٤ , ٠ , ٢√٢)

فإن ك = ........

(أ) ٣ (ب) ٦ (ج) ٤ (د) ٩

---

**(٢٤)** إذا كان ل١: $\overrightarrow{ر}$ = (٢ , ٣ , -٤)+ك(٢ , ٣ , أ) يوازى ل٢: $\frac{س - ٥}{ب} = \frac{ص + ٤}{٦} = \frac{ع - ٤}{٢}$ فإن أ+ب = .....

(أ) ٤ (ب) ٦ (ج) ٨ (د) ٥

---

**(٢٥)** جيوب تمام الإتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ = (−٢ , ١ , ٢) هى ......

(أ) (−٢ , ١ , ٢) (ب) ($\frac{-٢}{٣}$ , $\frac{١}{٣}$ , $\frac{٢}{٣}$) (ج) ($\frac{-٥}{٣}$ , ٥ , $\frac{٥}{٣}$) (د) (−١ , ١ , ١)

**(٢٦)** إذا كان قياس الزاوية بين مستقيم ، المحور ص يساوى قياس الزاوية بين المستقيم و المحور ع و قياس كل منهم ٦٠°
فإن قياس الزاوية بين المستقيم و المحور س يساوى .......

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (ج) ٦٠° (د) ٧٥°

---

**(٢٧)** إذا كان $\overrightarrow{\text{أب}} = -٣\overrightarrow{\text{س}} + ٣\overrightarrow{\text{ص}} + ٧\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب ج}} = \overrightarrow{\text{ص}} + ٥\overrightarrow{\text{ع}}$ فإن $\|\overrightarrow{\text{أ ج}}\| =$ ........

(أ) ٩ (ب) ١٠ (ج) ١٣ (د) ١٤

---

**(٢٨)** إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (١ , -١ , ٢)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (٣ , -٢ , ٠)$ ، $\overrightarrow{\text{ج}} = (٠ , ٢ , ٤)$ فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{ج}} =$ ......

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (ج) ١٤ (د) ١٦

---

**(٢٩)** إذا كان $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = ٤$ ، $\|\overrightarrow{\text{ب}}\| = ٣$ ، $\|\overrightarrow{\text{ج}}\| = ١٢$ حيث $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ج}}$ ثلاث متجهات متعامدة مثنى مثنى
فإن $\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ج}}\| =$ .......

(أ) ١٠ (ب) ١١ (ج) ١٢ (د) ١٣

---

**(٣٠)** إذا كان أ ب ج د متوازى أضلاع و كان $\overrightarrow{\text{أ ج}} = (٢ , ٢ , -١)$ ، $\overrightarrow{\text{ب د}} = (-١ , ٢ , -٣)$ فإن مساحة متوازى الأضلاع تساوى ......

(أ) ٦ (ب) $٧\sqrt{٦}$ (ج) $\sqrt{١٠١}$ (د) $\frac{١}{٢}\sqrt{١٠١}$

---

**(٣١)** إذا كان المستقيم ل$_١$: $\frac{\text{س}+٢}{-١} = \frac{\text{ص}+٣}{٣} = \frac{\text{ع}+٥}{٢}$ عمودى على المستقيم ل$_٢$: $\frac{\text{س}}{٢} = \frac{\text{ص}-٥}{\text{ك}} = \frac{\text{ع}-٦}{\text{م}}$
فإن ٣ك + ٢م = .....

(أ) −١ (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

---

**(٣٢)** قياس الزاوية بين المستقيمين ل$_١$: ٢س = ٣ص = −ع ، ل$_٢$: ٦س = −ص = −٤ع يساوى ......

(أ) ٤٥° (ب) ٠° (ج) ٩٠° (د) ١٨٠°

---

**(٣٣)** معادلة المستوى المار بالنقطة (١ , ٢ , ٣) و يوازى كل من المحورين س، ص هى .........

(أ) س + ص = ٣ (ب) ع = ٣ (ج) س = ١ (د) ص = ٢

---

**(٣٤)** إذا كانت المتجهات $\overrightarrow{أ}$ = (١ , −٢ , ١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (ك , −٥ , ٣) ، $\overrightarrow{جـ}$ = (٥ , −٩ , ٤) مستويه " تقع فى مستوى واحد" فإن ك = ......

أ) ٢ ب) −٢ ج) ٣ د) −٣

---

**(٣٥)** قياس الزاوية بين المستقيم ل١: (س − ١)/٢ = (ص − ٢)/١ = (ع + ٣)/(−٢) ، المستوى س + ص + ٤ = ٠ يساوى ......

أ) ٠° ب) ٤٥° ج) ٣٠° د) ٩٠°

---

**(٣٦)** إذا كان المستوى ٣س − ص + ٢ع + ٣ = ٠ ، المستوى ك س − ٤ص + ع − ٥ = ٠ متعامدان فإن ك = .......

أ) ٢ ب) −٢ ج) ٣ د) −٣

---

**(٣٧)** إذا كان المستقيم س = ٣ص = أع يوازى المستوى س + ٣ص + ٢ع + ٤ = ٠ فإن أ = ......

أ) ٣ ب) ٢ ج) ١ د) −١

---

**(٣٨)** قياس الزاوية المحصورة بين المستويين س − ع + ١ = ٠ ، ٢س − ٢ص − ع = ٠ يساوى ........

أ) ٣٠° ب) ٤٥° ج) ٩٠° د) ٦٠°

---

**(٣٩)** طول العمود المرسوم من النقطة أ = (٣ , ٠ , −٥) على المستوى ٢س + √٥ ص + ٤ع − ٦ = ٠ يساوى .........

أ) ٤ ب) ٥ ج) ٦ د) ٧

---

**(٤٠)** إذا كان المستوى س + ٥ص − ٦ع = ٣٠ يقطع من محاور الإحداثيات سَ ، صَ ، ع الأجزاء أ ، ب ، ج على الترتيب فإن أ + ب + ج = .......

أ) صفر ب) ٣٠ ج) ٣١ د) ٤١

---

**(٤١)** معادلة المستوى المار بالنقطة (١ , -٢ , ٥) و عمودى على المتجه (٢ , ١ , ٣) هى .......

أ) ٢س + ص + ٣ع = ١ ب) ٢س + ص + ٣ع = ١٥

ج) س − ٢ص + ٥ع = ١٥ د) س + ص + ع = ٤

---

**(٤٢)** إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ⊥ $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{أ}$ ⊥ $\overrightarrow{ج}$ وكان $\overrightarrow{ب}$ = (٢ , ٣ , ٢) ، $\overrightarrow{ج}$ = (١ , ٢ , ١) وكان || $\overrightarrow{أ}$ || = ٤ √٢

فإن $\overrightarrow{أ}$ = ......

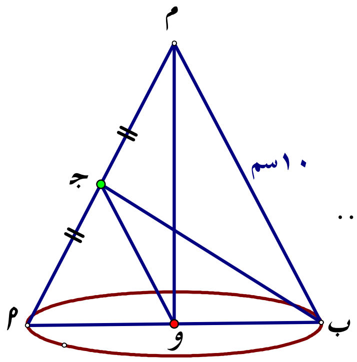
(أ) (٢ , ٣ , ١)  (ب) (−٤ , ٠ , ٤)  (ج) (٤ , ٤ , ٠)  (د) (٠ , −٤ , ٤)

-----------------

**(٤٣)** حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاثة رؤوس ليست فى وجه واحد هى أ(٢ , ١ , ٣) ، ب(−١ , ٣ , ٢) ، ج(١ , ١ , −٢) يساوى ........

(أ) ٣٠  (ب) ٢٨  (ج) ١٤  (د) ٥٦

-----------------



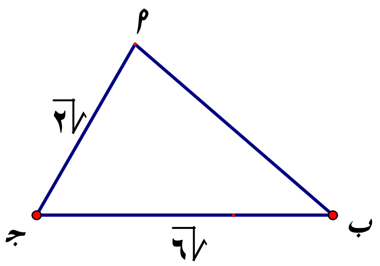

**(٤٤)** فى الشكل المقابل:

إذا كان محيط قاعدة المخروط الدائرى القائم هـ ١٢π سم و طول راسمه ١٠ سم و كانت نقطة ج هى منتصف $\overline{م أ}$ فإن $\overrightarrow{ب ج}$ • $\overrightarrow{ج و}$ = ......

(أ) ٩  (ب) ٣٦

(ج) −٤٣  (د) ٥٤

-----------------




**(٤٥)** فى الشكل المقابل إذا كان || $\overrightarrow{ب ج}$ || = √٦ ، || $\overrightarrow{أ ج}$ || = √٢

، $\overrightarrow{ب أ}$ = (−١ , ٠ , ١) فإن $\overrightarrow{ب أ}$ • $\overrightarrow{ب ج}$ = ......

(أ) ١  (ب) ٢

(ج) ٣  (د) ٤

-----------------

**(٤٦)** النقطة التى تنتمى للمستقيم $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، −١ ، ٣) + ك (١ ، ٢ ، −١) هى ....

(أ) (١ ، ١ ، ١)  (ب) (٠ ، ٢ ، −٢)  (ج) (٣ ، ١ ، ٢)  (د) (٤ ، −٣ ، ٠)

-----------------

**(٤٧)** النقطة التى تنتمى للمستوى $\overrightarrow{ر}$ = (−١ , ٠ , ٢) + ك(٠ , ٠ , ١) + م(١ , ٠ , −١) هى ......

(أ) (٠ , ١ , ٢)  (ب) (٢ , ١ , ٣)  (ج) (٣ , ١ , ٢)  (د) (١ , ٠ , ١)

-----------------

**(٤٨)** معادلة المحور سَ فى الفراغ هى ........

(أ) س = ٠ ، ص = ٠  (ب) س = ٠ ، ع = ٠  (ج) س = ٠  (د) ع = ٠ ، ص = ٠

-----------------

# أسئلة إنتاج الإجابة

(١) إذا كانت : أ(٤ , ٨ , ١٢) ، ب(٢ , ٤ , ٦) ، جـ(٣ , ٥ , ٤) ، د(٥ , ٨ , ٥) فإثبت أن النقاط أ ، ب ، جـ ، د تقع فى مستوى واحد.

---

(٢) إوجد قيمة ك التى تجعل المتجهات $\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{س}} - \overrightarrow{\text{ص}} + \overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = ٣\overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}} + ٢\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}} = \overrightarrow{\text{س}} + \text{ك}\overrightarrow{\text{ص}} - ٣\overrightarrow{\text{ع}}$ فى مستوى واحد.

---

(٣) إوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة أ(٢ , −١ , ٣) و الموازى للمتجه $\overrightarrow{\text{هـ}}$ = (−٣ , ٤ , ١) ثم عين نقطة تقاطعه مع المستوى الإحداثى س ص

---

(٤) أوجد المعادلات البارامترية للمستقيم المار بالنقطتين أ(٢ , ٢ , −٣) ، ب(١ , −١ , ٠) ثم أذكر هل النقطة جـ(١ , ٣ , ٢) ∋ لهذا المستقيم أم لا.

---

(٥) إوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ , ٢ , ٥) و يصنع مع الإتجاهات الموجبة لمحاور الإحدثيات زوايا متساوية.

---

(٦) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل و يقطع المستقيم $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٣,١,٤) + ك(٢,١,٣) على التعامد.

---

(٧) ليكن ل$_1$: $\begin{cases} \text{س} = ٢ + \text{ك} \\ \text{ص} = ٢ + ٢\text{ك} \\ \text{ع} = -٤ - \text{ك} \end{cases}$ ، ل$_2$: $\frac{\text{س} - ١}{٢} = \frac{\text{ص} + ٥}{٤} = \frac{\text{ع}}{-٢}$ أثبت أن المستقيمان مستويان.

---

(٨) أثبت أن المستقيمان $\overrightarrow{\text{ر}}_1$ = (٣,−٣,٥) + ك$_1$ (٠,−٥,٥) ، $\overrightarrow{\text{ر}}_2$ = (−٢,٣,١) + ك$_2$ (٥,−١,−١) متعامدان و متقاطعان و أوجد نقطة تقاطعهما.

---

(٩) أثبت أن المستقيمان $\overrightarrow{\text{ر}}_1$ = (٣,−١,٢) + ك$_1$ (٤,١,٣) ، $\overrightarrow{\text{ر}}_2$ = (٠,٤,−١) + ك$_2$ (١,−١,٢) متخالفان.

---

(١٠) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢ , ١ , −٤) على المستقيم $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (١,−١,٢) + ك(٢,٣,−٢).

---

(١١) إوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة أ(١ , −٢ , ٤) و العمودى على المستقيم $\overleftrightarrow{جب}$ حيث ب(٣ , ٠ , −٣) ، جـ(−١ , −٣ , ٢) .

---

(١٢) إوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة أ(−٢ , ٣ , ٤) و الذى يوازى كل من المتجهين $\vec{هـ}_1$ = (١ , −٢ , ١) ، $\vec{هـ}_2$ = (٣ , ٢ , ٤).

---

(١٣) إوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة أ(١ , −١ , ١) و الذى يكون عمودياً عل كل من المستويين سـ : س −ص +ع −١ = ٠ ، صـ : ٢س + ص +ع +١ = ٠.

---

(١٤) إوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقاط أ(٣ , ١ , ٠) ، ب(٠ , ٧ , ٢) ، جـ(٤ , ١ , ٥).

---

(١٥) إذا قطع المستوى ٣س + ٢ص + ٤ع = ١٢ محاور الإحداثيات س ، ص ، ع فى النقط أ ، ب، جـ على الترتيب فإوجد مساحة △ أب جـ .

---

(١٦) إوجد معادلة المستوى الذى يحوى المستقيم ل$_1$ : $\frac{س+١}{٢}$ = ص = $\frac{ع-٤}{-٣}$ و يمر بنقطة الأصل.

---

(١٧) إثبت أن المستقيمين ل$_1$ : ٢س = ٣ص = ٤ع ، ل$_2$ : ٣س = ٢ص = ٥ع متقاطعان ثم إوجد معادلة المستوى الذى يحتويهما.

---

(١٨) إثبت أن المستقيمان ل$_1$ : $\left\{\begin{array}{l} س = ٤-٢ك \\ ص = ٣+ك \\ ع = ١+٣ك \end{array}\right.$ ، ل$_2$ : $\left\{\begin{array}{l} س = ٥+٢ك \\ ص = ١-ك \\ ع = ١-٣ك \end{array}\right.$ متوازيان و إوجد معادلة المستوى الذى يحويهما.

---

(١٩) إذا كان المستوى سـ: ٢س − ص + ٧ = ٠ ، صـ: س − ٥ص + ٣ع = ٠ ، المستقيم ل: $\frac{س-١}{٢} = \frac{ص+٣}{-١} = \frac{ع}{٥}$ فإوجد

① قياس الزاوية بين المستويين سـ ، صـ ② قياس الزاوية بين المستوى سـ ، المستقيم ل .

---

(٢٠) إثبت أن المستويين سـ: ٣س + ٦ص + ٦ع = ٤ ، صـ: س + ٢ص + ٢ع = ١ متوازيان و أوجد البعد بينهما.

---

(٢١) أوجد مسقط النقطة أ(٠ , ٩ , ٦) على المستقيم المار بالنقطتين ب(١ , ٢ , ٣)، جـ(٧ , −٢ , ٥).

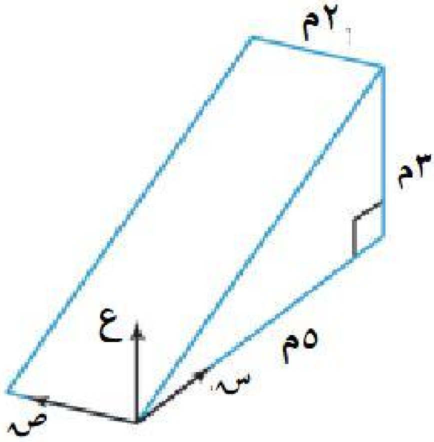
(٢٢) إوجد نقطة تقاطع المستقيم س = ٢ + ٣ك ، ص = −٤ك ، ع = ٥+ك مع المستوى ٤س + ٥ص − ٢ع = ١٨ ثم إوجد قياس الزاوية بينهما.

---

(٢٣) إوجد معادلة المستوى الذى يحتوى المستقيم $\overrightarrow{ر_١}$ = (١, ٢, ٤)+ك١ (٤, ١, ١١)، عمودى على المستقيم $\overrightarrow{ر_٢}$ = (٤, ١٥, ٨)+ك٢ (٢, ٣, −١).

---

(٢٤) بالإستعانة بالشكل المجاور إوجد معادلة المستوى المائل.
و كذلك معادلة خط أكبر ميل الذى يمر بنقطة الأصل.




---

(٢٥) إوجد الصور المختلفة لمعادلة خط تقاطع المستويين س + ص + ع = ١ ، س + ع = ٠

---

(٢٦) إثبت أن المستقيمان ل١ : { س = ٤−٢ك ، ص = ٣+ك ، ع = ١+٣ك } ، ل٢ : { س = ٥+٢ك ، ص = ١−ك ، ع = ١ − ٣ك } متوازيان و إوجد معادلة المستوى الذى يحويهما.

---

(٢٧) إوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة ( ٢ ، ٤ ، ١) و عمودى على المستوى ٣س − ص + ٥ع = ٧٧

---

(٢٨) إوجد نقطة ﺃ تقع على المستوى ٢س + ص − ٢ع = ١ بحيث يكون بعدها عن النقطة ب ( ١ ، ٠ ، −١) أقل ما يمكن.

---

(٢٩) إوجد معادلة الكرة التى مركزها النقطة ( −٢ ، ١ ، −١) و المستقيم ٢س + ٢ص + ع = ٣ مماساً لها.

---

(٣٠) إوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة ﺃ(١ , −١ , ١) و الذى يكون عمودياً عل كل من المستويين سـ : س −ص +ع −١ = ٠ ، صـ : ٢س + ص +ع +١ = ٠.

## الإجابات

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (١) | ب | (٢) | ب | (٣) | د | (٤) | ج | (٥) | ج | (٦) | ب |
| (٧) | ب | (٨) | ب | (٩) | د | (١٠) | أ | (١١) | ج | (١٢) | أ |
| (١٣) | د | (١٤) | ج | (١٥) | ب | (١٦) | ج | (١٧) | ب | (١٨) | ب |
| (١٩) | د | (٢٠) | د | (٢١) | ب | (٢٢) | ج | (٢٣) | أ | (٢٤) | د |
| (٢٥) | ب | (٢٦) | ب | (٢٧) | ج | (٢٨) | د | (٢٩) | د | (٣٠) | د |
| (٣١) | ج | (٣٢) | ج | (٣٣) | ب | (٣٤) | أ | (٣٥) | ب | (٣٦) | ب |
| (٣٧) | د | (٣٨) | ب | (٣٩) | أ | (٤٠) | ج | (٤١) | ب | (٤٢) | ب |
| (٤٣) | ب | (٤٤) | ج | (٤٥) | ج | (٤٦) | ج | (٤٧) | د | (٤٨) | د |

## حلول أسئلة إنتاج الإجابة

(١) ∵ $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (-٢ , -٤ , -٦)$ ، $\overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{أ} = (-١ , -٣ , -٨)$

∵ $\overrightarrow{أد} = \overrightarrow{د} - \overrightarrow{أ} = (١ , ٠ , -٧)$

∵ $\overrightarrow{أب} \bullet \overrightarrow{أجـ} \times \overrightarrow{أد} = \begin{vmatrix} -٢ & -٤ & -٦ \\ -١ & -٣ & -٨ \\ ١ & ٠ & -٧ \end{vmatrix} = -٤٢ + ٦٠ - ١٨ = ٠$

∴ النقط أ ، ب ، ج ، د تقع فى مستوى واحد

---

(٢) ∵ المتجهات $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ تقع فى مستوى واحد $\Leftarrow$ $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ} = ٠$

∴ $\begin{vmatrix} ١ & -١ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \\ ١ & ك & -٣ \end{vmatrix} = ٠$ $\Leftarrow$ $١ \times (-٣ - ٢ك) + ١ \times (-٩ - ٢) + ١ \times (٣ك - ١) = ٠$

∴ $-٣ - ٢ك - ١١ + ٣ك - ١ = ٠$ $\Leftarrow$ $\boxed{ك = ١٥}$

---

(٣) الصورة المتجهه لمعادلة المستقيم :

∵ $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{أ} + ك\overrightarrow{هـ}$ $\Leftarrow$ $\overrightarrow{ر} = (٢ , -١ , ٣) + ك(-٣ , ٤ , ١)$

المعادلات البارامترية :

∵ $\left\{\begin{array}{l} س = س_١ + ك أ \\ ص = ص_١ + ك ب \\ ع = ع_١ + ك جـ \end{array}\right.$ $\Leftarrow$ $\left\{\begin{array}{l} س = ٢ - ٣ك \\ ص = -١ + ٤ك \\ ع = ٣ + ك \end{array}\right.$

الصورة الإحداثية :

∵ $\frac{\text{س}-\text{س}_١}{\text{أ}} = \frac{\text{ص}-\text{ص}_١}{\text{ب}} = \frac{\text{ع}-\text{ع}_١}{\text{جـ}}$ ⇐ $\frac{\text{س}-٢}{-٣} = \frac{\text{ص}+١}{٤} = \frac{\text{ع}-٣}{١}$

لإيجاد نقطة التقاطع مع المستوى س ص نضع ع = ٠

∴ $\frac{\text{س}-٢}{-٣} = \frac{\text{ص}+١}{٤} = \frac{٠-٣}{١}$ ⇐ $\frac{\text{س}-٢}{-٣} = \frac{\text{ص}+١}{٤} = -٣$

∴ $\left.\begin{array}{l}\text{س} - ٢ = ٩\\ \text{ص} + ١ = -١٢\end{array}\right\}$ ⇐ $\left.\begin{array}{l}\text{س} = ١١\\ \text{ص} = -١٣\end{array}\right\}$

∴ النقطة هى (١١ , −١٣ , ٠)

---

(٤) ∵ أ(٢ , ٢ , −٣) ، ب(١ , −١ , ٠) ∈ للمستقيم

∴ متجه الإتجاه $\overrightarrow{\text{هـ}} = \overrightarrow{\text{أب}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{هـ}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{هـ}}$ = (١ , −١ , ٠) − (٢ , ٢ , −٣) ⇐ $\overrightarrow{\text{هـ}}$ = (−١ , −٣ , ٣)

الصورة المتجهه لمعادلة المستقيم :

∵ $\overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{أ}} + \text{ك}\,\overrightarrow{\text{هـ}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (١ , −١ , ٠) + ك(−١ , −٣ , ٣)

المعادلات البارامترية :

∵ $\left.\begin{array}{l}\text{س} = \text{س}_١ + \text{ك أ}\\ \text{ص} = \text{ص}_١ + \text{ك ب}\\ \text{ع} = \text{ع}_١ + \text{ك جـ}\end{array}\right\}$ ⇐ $\left.\begin{array}{l}\text{س} = ١ - \text{ك}\\ \text{ص} = -١ - ٣\text{ك}\\ \text{ع} = ٣\text{ك}\end{array}\right\}$

النقطة جـ(١ , ٣ , ٢) ∈ للمستقيم إذا و فقط إذا وجدت قيمة وحيدة لـ **ك** تحقق المعادلات البارامترية

أى نبحث عن قيمة وحيدة لـ **ك** بحيث $\left\{\begin{array}{l}١ = ١ - \text{ك}\\ ٣ = -١ - ٣\text{ك}\\ ٢ = ٣\text{ك}\end{array}\right.$ ⇐ $\left.\begin{array}{l}\text{ك} = ٠\\ \text{ك} = \frac{-٤}{٣}\\ \text{ك} = \frac{٢}{٣}\end{array}\right\}$

∵ قيمة ك ليست وحيدة ⇐ جـ(١ , ٣ , ٢) ∉ للمستقيم

**حل آخر :**

النقطة جـ(١ , ٣ , ٢) ∈ للمستقيم إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{\text{أجـ}} \parallel \overrightarrow{\text{هـ}}$

∵ $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ = (١ , ٣ , ٢) − (٢ , ٢ , −٣) ⇐ $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ = (−١ , ١ , ٥)

∵ $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ = (−١ , ١ , ٥)، $\overrightarrow{\text{هـ}}$ = (−١ , −٣ , ٣) ⇐ $\frac{-١}{-١} \neq \frac{١}{-٣}$

∴ $\overrightarrow{\text{أجـ}} \nparallel \overrightarrow{\text{هـ}}$ ⇐ جـ(١ , ٣ , ٢) ∉ للمستقيم

---

(٥) نفرض أن $\theta_{\text{س}} = \theta_{\text{ص}} = \theta_{\text{ع}} = \theta$

∵ جتا² $\theta$ س + جتا² $\theta$ ص + جتا² $\theta$ ع = ١ ⇐ جتا² $\theta$ + جتا² $\theta$ + جتا² $\theta$ = ١

∴ ٣جتا² $\theta$ = ١ ⇐ جتا $\theta$ = ± $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ متجه إتجاه للمستقيم هو $\overleftarrow{ه}$ = ± $\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}, \frac{١}{\sqrt{٣}}, \frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$ أو $\overleftarrow{ه}$ = ±( $\sqrt{٣}$, $\sqrt{٣}$, $\sqrt{٣}$ )

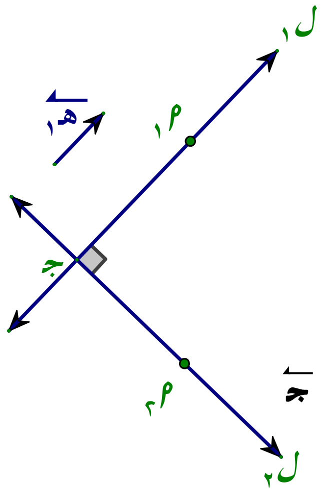
∴ $\overleftarrow{ر}$ = (٣ , ٢ , ٥) + ك( $\sqrt{٣}$, $\sqrt{٣}$, $\sqrt{٣}$ ) ⇐ $\overleftarrow{ر}$ = (٣ , ٢ , ٥) + ك(١ , ١ , ١)

---

(٦) نفرض أن المستقيم المطلوب هو ل١ ، أ١(٠ , ٠ , ٠)

، المستقيم المعطى ل٢ حيث $\overleftarrow{ر}_٢$ = (٣, ١, ٤) + ك(٢, ١, ٣)

أى أن أ٢ (٣, ١, ٤) ، $\overleftarrow{ه}_٢$ = (٢, ١, ٣)




لتكن جـ = ل١ ∩ ل٢ أى أن جـ∈ل٢

∴ $\overleftarrow{جـ}$ = (٣, ١, ٤) + ك(٢, ١, ٣)

∴ $\overleftarrow{جـ}$ = (٣ + ٢ك , ١ + ك , ٤ + ٣ك)

∴ متجه إتجاه ل١ هو $\overleftarrow{ه}_١$ = $\overleftarrow{جـ أ_١}$ ⇐ $\overleftarrow{ه}_١$ = $\overleftarrow{أ}_١$ − $\overleftarrow{جـ}$

∴ $\overleftarrow{ه}_١$ = أ١(٠ , ٠ , ٠) − (٣ + ٢ك , ١ + ك , ٤ + ٣ك)

∴ $\overleftarrow{ه}_١$ = (−٣ − ٢ك , −١ − ك , −٤ − ٣ك)

∵ ل١ ⊥ ل٢ ⇐ $\overleftarrow{ه}_١$ ⊥ $\overleftarrow{ه}_٢$

∴ $\overleftarrow{ه}_١$ • $\overleftarrow{ه}_٢$ = ٠

∴ (−٣ − ٢ك , −١ − ك , −٤ − ٣ك)•(٢, ١, ٣) = ٠

∴ −٦ − ٤ك − ١ − ك − ١٢ − ٩ك = ٠ ⇐ $\boxed{ك = \frac{-١٩}{١٤}}$

∴ $\overleftarrow{ه}_١$ = (−٣ + ٢ × $\frac{١٩}{١٤}$ , −١ + $\frac{١٩}{١٤}$ , −٤ + ٣ × $\frac{١٩}{١٤}$)

∴ $\overleftarrow{ه}_١$ = ($\frac{-٢}{٧}$ , $\frac{٥}{١٤}$ , $\frac{١}{١٤}$) ⇐ يمكن إعتبار متجه الإتجاه ١٤$\overleftarrow{ه}_١$ = (−٤ , ٥ , ١)

∴ $\overleftarrow{ر}_١$ = (٠, ٠, ٠) + ك(−٤ , ٥ , ١) ⇐ $\overleftarrow{ر}_١$ = ك(−٤ , ٥ , ١)

---

(٧) ∵ ل١: $\left.\begin{matrix} س = ٢ + ك \\ ص = ٢ + ٢ك \\ ع = −٤ − ك \end{matrix}\right\}$ ⇐ $\overleftarrow{ه}_١$ = (١ , ٢ , −١)

∵ ل٢: $\frac{س − ١}{٢} = \frac{ص + ٥}{٤} = \frac{ع}{−٢}$ ⇐ $\overleftarrow{ه}_٢$ = (٢ , ٤ , −٢)

$\because \frac{١}{٢} = \frac{٢}{٤} = \frac{-١}{-٢} \Leftarrow \overrightarrow{ه}_١ \,//\, \overrightarrow{ه}_٢ \Leftarrow$ ل$_١$ // ل$_٢$ أى أن المستقيمان مستويان

---

(٨) $\because \overrightarrow{ه}_١ = (٠ , -٥ , ٥)$ ، $\overrightarrow{ه}_٢ = (٥ , -١ , -١)$

$\therefore \overrightarrow{ه}_١ \cdot \overrightarrow{ه}_٢ = (٠ , -٥ , ٥) \cdot (٥ , -١ , -١)$

$\therefore \overrightarrow{ه}_١ \cdot \overrightarrow{ه}_٢ = ٠ + ٥ - ٥ = ٠ \Leftarrow$ المستقيمان متعامدان.

لإيجاد نقطة التقاطع نبحث عن ك$_١$,ك$_٢$ $\in$ ح حيث $\overrightarrow{ر}_١ = \overrightarrow{ر}_٢$

$\therefore (٣ , -٣ , ٥) +$ ك$_١$ $(٠ , -٥ , ٥) = (-٢ , ٣ , ١) +$ ك$_٢$ $(٥ , -١ , -١)$

$\therefore ($٣ , −٣−٥ك$_١$ , ٥+٥ك$_١$$) = ($−٢ + ٥ك$_٢$ , ٣−ك$_٢$ , ١−ك$_٢$$)$

$\therefore$
−٢ + ٥ك$_٢$ = ٣
٣−ك$_٢$ = −٣−٥ك$_١$
١−ك$_٢$ = ٥+٥ك$_١$
$\Leftarrow$
ك$_٢$ = ١ ... (١)
٥ك$_١$ − ك$_٢$ = −٦ ... (٢) بحل (١) ، (٢)
٥ك$_١$ + ك$_٢$ = −٤ ... (٣)

$\therefore$ $\boxed{\text{ك}_٢ = ١}$ ، من (١) $\boxed{\text{ك}_١ = -١}$ و هذه القيم تحقق المعادلة (٣)

$\therefore$ المستقيمان متقاطعان و لإيجاد نقطة التقاطع نعوض عن ك$_١$ = −١ فى معادلة المستقيم الأول

$\therefore$ نقطة التقاطع هى $\overrightarrow{ر}_١ = (٣ , -٣ , ٥) - (٠ , -٥ , ٥) = (٣ , ٢ , ٠)$

---

(٩) $\because \overrightarrow{ه}_١ = (٤ , ١ , ٣)$ ، $\overrightarrow{ه}_٢ = (١ , -١ , ٢)$

$\therefore \overrightarrow{ه}_١ \cdot \overrightarrow{ه}_٢ = (٤ , ١ , ٣) \cdot (١ , -١ , ٢)$

$\therefore \overrightarrow{ه}_١ \cdot \overrightarrow{ه}_٢ = ٤ - ١ + ٦ = ٩ \neq ٠ \Leftarrow$ المستقيمان متقاطعان أو متخالفان.

نبحث عن ك$_١$,ك$_٢$ $\in$ ح حيث $\overrightarrow{ر}_١ = \overrightarrow{ر}_٢$

$\therefore (٣ , -١ , ٢) +$ ك$_١$ $(٤ , ١ , ٣) = (٠ , ٤ , -١) +$ ك$_٢$ $(١ , -١ , ٢)$

$\therefore ($٣+٤ك$_١$ , −١+ك$_١$ , ٢+٣ك$_١$$) = ($ك$_٢$ , ٤−ك$_٢$ , −١+٢ك$_٢$$)$

$\therefore$
٣+٤ك$_١$ = ك$_٢$
−١+ك$_١$ = ٤−ك$_٢$
٢+٣ك$_١$ = −١+٢ك$_٢$
$\Leftarrow$
٤ك$_١$ − ك$_٢$ = −٣ ... (١)
ك$_١$ + ك$_٢$ = ٥ ... (٢) بحل (١) ، (٢)
٣ك$_١$ − ٢ك$_٢$ = −٣ ... (٣)

$\therefore$ $\boxed{\text{ك}_٢ = \frac{٢٣}{٥}}$ ، من (١) $\boxed{\text{ك}_١ = \frac{٢}{٥}}$ و هذه القيم لا تحقق المعادلة (٣)

$\therefore$ المستقيمان متخالفان.

---

(١٠) لتكن ب(٢ , ١ , −٤) ، أ(١ , −١ , ٢) ∈ للمستقيم ، $\overrightarrow{هـ}$ = (٢ , ٣ , −٢)

∴ $\overrightarrow{أب}$ = (٢ , ١ , −٤) − (١ , −١ , ٢) ⇐ $\overrightarrow{أب}$ = (١ , ٢ , −٦)

∴ $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{هـ} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ٢ & -٦ \\ ٢ & ٣ & -٢ \end{vmatrix}$ ⇐ $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{هـ}$ = ١٤$\overrightarrow{س}$ − ١٠$\overrightarrow{ص}$ − $\overrightarrow{ع}$

∴ $\|\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{هـ}\| = \sqrt{١٩٦+١٠٠+١} = \sqrt{٢٩٧}$

∵ $\overrightarrow{هـ}$ = (٢ , ٣ , −٢) ⇐ $\|\overrightarrow{هـ}\| = \sqrt{٤+٩+٤} = \sqrt{١٧}$

∵ البعد = $\frac{\|\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{هـ}\|}{\|\overrightarrow{هـ}\|}$ ⇐ البعد = $\frac{\sqrt{٢٩٧}}{\sqrt{١٧}}$ = ٤,٢

---

(١١) ∵ المستقيم المطلوب ⊥ $\overleftrightarrow{جب}$ ⇐ $\overrightarrow{ن}$ = $\overrightarrow{بجـ}$

∴ $\overrightarrow{ن}$ = $\overrightarrow{جـ}$ − $\overrightarrow{ب}$ ⇐ $\overrightarrow{ن}$ = (−١ , −٣ , ٢) − (٣ , ٠ , −٣)

∴ $\overrightarrow{ن}$ = (−٤ , −٣ , ٥)، ∵ $\overrightarrow{ن} \bullet \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \bullet \overrightarrow{أ}$

∴ (−٤ , −٣ , ٥) • $\overrightarrow{ر}$ = (−٤ , −٣ , ٥) • (١ , −٢ , ٤)

∴ (−٤ , −٣ , ٥) • $\overrightarrow{ر}$ = −٤ + ٦ + ٢٠

∴ $\boxed{(−٤ , −٣ , ٥) \bullet \overrightarrow{ر} = ٢٢}$ الصورة المتجهه.

∵ أ(س − س$_١$) + ب(ص − ص$_١$) + جـ(ع − ع$_١$) = ٠

∴ $\boxed{−٤(س − ١) − ٣(ص + ٢) + ٥(ع − ٤) = ٠}$ الصورة القياسية.

و بفك الأقواس و تجميع الحدود المتشابهه : −٤س + ٤ −٣ص − ٦ + ٥ع − ٢٠ = ٠

∴ $\boxed{٤س + ٣ص − ٥ع + ٢٢ = ٠}$ الصورة العامة.

---

(١٢) ∵ المستوى // $\overrightarrow{هـ_١}$ ، $\overrightarrow{هـ_٢}$ ⇐ $\overrightarrow{ن} = \overrightarrow{هـ_١} \times \overrightarrow{هـ_٢}$

∴ $\overrightarrow{ن} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & -٢ & ١ \\ ٣ & ٢ & ٤ \end{vmatrix}$ ⇐ $\overrightarrow{ن}$ = (−١٠ , −١ , ٨)

∵ $\overrightarrow{ن} \bullet \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \bullet \overrightarrow{أ}$ ⇐ (−١٠ , −١ , ٨) • $\overrightarrow{ر}$ = (−١٠ , −١ , ٨) • (−٢ , ٣ , ٤)

∴ (−١٠ , −١ , ٨) • ر⃗ = −٢٠ − ٣ + ٣٢

∴ $\boxed{\text{(−١٠ , −١ , ٨) • ر⃗ = ٤٩}}$ الصورة المتجهه.

∵ أ(س − س١) + ب(ص − ص١) + جـ(ع − ع١) = ٠

∴ $\boxed{\text{−١٠(س + ٢) − (ص − ٣) + ٨(ع − ٤) = ٠}}$ الصورة القياسية.

و بفك الأقواس و تجميع الحدود المتشابهه : −١٠س − ٢٠ − ص + ٣ + ٨ع − ٣٢ = ٠

∴ $\boxed{\text{١٠س + ص − ٨ع + ٤٩ = ٠}}$ الصورة العامة.

---

(١٣) ∵ سـ : س − ص + ع − ١ = ٠ ⇐ ن⃗س = (١ , −١ , ١)

∵ صـ : ٢س + ص + ع + ١ = ٠ ⇐ ن⃗ص = (٢ , ١ , ١)

∵ المستوى المطلوب ⊥ سـ ، صـ ⇐ ن⃗ = ن⃗س × ن⃗ص

∴ ن⃗ = $\begin{vmatrix} \vec{\text{س}} & \vec{\text{ص}} & \vec{\text{ع}} \\ ١ & −١ & ١ \\ ٢ & ١ & ١ \end{vmatrix}$ ⇐ ن⃗ = (−٢ , ١ , ٣)

∴ (−٢ , ١ , ٣) • ر⃗ = (−٢ , ١ , ٣) • (١ , −١ , ١)

∴ $\boxed{\text{(−٢ , ١ , ٣) • ر⃗ = ٠}}$ الصورة المتجهه.

∴ $\boxed{\text{−٢(س − ١) + (ص + ١) + ٣(ع − ١) = ٠}}$ الصورة القياسية.

∴ $\boxed{\text{٢س − ص − ٣ع = ٠}}$ الصورة العامة

---

(١٤) ∵ أب⃗ = ب⃗ − أ⃗ ⇐ أب⃗ = (٠ , ٧ , ٢) − (٣ , ١ , ٠)

∴ أب⃗ = (−٣ , ٦ , ٢)

∵ أجـ⃗ = جـ⃗ − أ⃗ ⇐ أجـ⃗ = (٤ , ١ , ٥) − (٣ , ١ , ٠)

∴ أجـ⃗ = (١ , ٠ , ٥)

∵ أ ، ب ، جـ ∋ للمستوى ⇐ ن⃗ = أب⃗ × أجـ⃗

∴ ن⃗ = $\begin{vmatrix} \vec{\text{س}} & \vec{\text{ص}} & \vec{\text{ع}} \\ −٣ & ٦ & ٢ \\ ١ & ٠ & ٥ \end{vmatrix}$ ⇐ ن⃗ = (٣٠ , ١٧ , −٦)

∴ $(٣٠ , ١٧ , -٦) \bullet \overrightarrow{ر} = (٣٠ , ١٧ , -٦) \bullet (٣ , ١ , ٠)$

∴ $\boxed{(٣٠ , ١٧ , -٦) \bullet \overrightarrow{ر} = ١٠٧}$ الصورة المتجهه.

∴ $\boxed{٣٠(س - ٣) + ١٧(ص - ١) - ٦ع = ٠}$ الصورة القياسية.

∴ $\boxed{٣٠س + ١٧ص - ٦ع - ١٠٧ = ٠}$ الصورة العامة.

---

(١٥) ∵ $٣س + ٢ص + ٤ع = ١٢$ بالقسمة ÷ ١٢

∴ $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{٦} + \frac{ع}{٣} = ١$ ⇐ الأجزاء هى ٤ ، ٦ ، ٣

∴ أ$(٤ , ٠ , ٠)$ ، ب$(٠ , ٦ , ٠)$ ، جـ$(٠ , ٠ , ٣)$

∴ $\overrightarrow{أب} = (٠ , ٦ , ٠) - (٤ , ٠ , ٠)$ ⇐ $\overrightarrow{أب} = (-٤ , ٦ , ٠)$

، $\overrightarrow{أجـ} = (٠ , ٠ , ٣) - (٤ , ٠ , ٠)$ ⇐ $\overrightarrow{أجـ} = (-٤ , ٠ , ٣)$

∴ $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أجـ} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -٤ & ٦ & ٠ \\ -٤ & ٠ & ٣ \end{vmatrix}$ ⇐ $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أجـ} = (١٨ , ١٢ , ٢٤)$

∴ $\| \overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أجـ} \| = \sqrt{(١٨)^٢ + (١٢)^٢ + (٢٤)^٢} = ٦\sqrt{٢٩}$

∵ مساحة △ أب جـ $= \frac{١}{٢} \| \overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أجـ} \| = ٣\sqrt{٢٩}$ وحدة طول مربعة.

---

(١٦) ∵ $ل_١ : \frac{س + ١}{٢} = ص = \frac{ع - ٤}{-٣}$

∴ $\overrightarrow{هـ_١} = (٢ , ١ , -٣)$ ، النقطة أ$(-١ , ٠ , ٤) \in ل_١$

∵ المستوى المطلوب يحتوى $ل_١$ ، النقطة و$(٠ , ٠ , ٠) \notin ل_١$

∴ $\overrightarrow{ن} = \overrightarrow{وأ} \times \overrightarrow{هـ_١}$

∴ $\overrightarrow{ن} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -١ & ٠ & ٤ \\ ٢ & ١ & -٣ \end{vmatrix}$ ⇐ $\overrightarrow{ن} = (-٤ , ٥ , -١)$

∵ $\overrightarrow{ن} \bullet \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \bullet \overrightarrow{و}$

∴ $(-٤ , ٥ , -١) \bullet \overrightarrow{ر} = (-٤ , ٥ , -١) \bullet (٠ , ٠ , ٠)$

∴ $(-٤ , ٥ , -١) \bullet \overrightarrow{ر} = ٠$

∴ (−٤ , ٥ , −١) • ر⃗ = ٠    الصورة المتجهه.

∴ −٤س+٥ص−ع = ٠    الصورة القياسية ، الصورة العامة.

---

(١٧) ∵ ل١ : ٢س = ٣ص = ٤ع بالقسمة ÷ ١٢ ⟸ ل١ : س/٦ = ص/٤ = ع/٣

∴ ل١ : ر⃗١ = ك١(٦ , ٤ , ٣) أى أن هـ⃗١ = (٦ , ٤ , ٣)

∵ ل٢ : ٣س = ٢ص = ٥ع بالقسمة ÷ ٣٠ ⟸ ل٢ : س/١٠ = ص/١٥ = ع/٦

∴ ل٢ : ر⃗٢ = ك٢(١٠ , ١٥ , ٦) أى أن هـ⃗٢ = (١٠ , ١٥ , ٦)

نوجد نقطة تقاطع المستقيمين : ر⃗١ = ر⃗٢ ⟸ ك١(٦ , ٤ , ٣) = ك٢(١٠ , ١٥ , ٦)

∴ { ٦ك١ = ١٠ك٢ ، ٤ك١ = ١٥ك٢ ، ٣ك١ = ٦ك٢ } ⟸ { ٣ك١ = ٥ك٢ ... (١) ، ٤ك١ = ١٥ك٢ ... (٢) ، ك١ = ٢ك٢ ... (٣) }

بحل (١) ، (٣) [ك١ = ٠] ، [ك٢ = ٠] و هذه القيم تحقق المعادلة (٢)

∴ المستقيمان متقاطعان فى نقطة الأصل " و "

∵ المستوى يحوى المستقيمين ل١ ، ل٢ ⟸ ن⃗ = هـ⃗١ × هـ⃗٢ = (−٢١ , −٦ , ٥٠)

∴ (−٢١ , −٦ , ٥٠) • ر⃗ = (−٢١ , −٦ , ٥٠) • (٠ , ٠ , ٠)

∴ (−٢١ , −٦ , ٥٠) • ر⃗ = ٠+٠+٠

∴ (−٢١ , −٦ , ٥٠) • ر⃗ = ٠    الصورة المتجهه.

∴ −٢١س−٦ص+٥٠ع = ٠    الصورة القياسية ، الصورة العامة.

---

(١٨) ∵ هـ⃗١ = (−٢ , ١ , ٣) ، أ١(٤ , ٣ , ١) ∈ ل١ ، هـ⃗٢ = (٢ , −١ , −٣) ، أ٢(٥ , ١ , ١) ∈ ل٢

∵ −٢/٢ = ١/−١ = ٣/−٣ ⟸ هـ⃗١ // هـ⃗٢ أى أن ل١ // ل٢

∵ أ١أ٢⃗ = أ٢⃗ − أ١⃗ ⟸ أ١أ٢⃗ = (٥ , ١ , ١) − (٤ , ٣ , ١)

∴ أ١أ٢⃗ = (١ , −٢ , ٠)

∴ ن⃗ = هـ⃗١ × أ١أ٢⃗ ⟸ ن⃗ = (٦ , ٣ , ٣) و يمكن إعتبار ن⃗ = (٢ , ١ , ١)

∴ (٢ , ١ , ١) • ر⃗ = (٢ , ١ , ١) • (٤ , ٣ , ١)

∴ (٢ , ١ , ١) • ر⃗ = ٨+٣+١ ⟸ (٢ , ١ , ١) • ر⃗ = ١٢    الصورة المتجهه.

$\therefore$ $2(\text{س} - 4) + (\text{ص} - 3) + (\text{ع} - 1) = 0$    الصورة القياسية

$\therefore$ $\boxed{2\text{س} + \text{ص} + \text{ع} - 12 = 0}$    الصورة العامة.

---

(١٩) ① $\because$ سـ: $2\text{س} - \text{ص} + 7 = 0$ $\Leftarrow$ $\vec{n}_{\text{س}} = (2 , -1 , 0)$

$\because$ صـ: $\text{س} - 5\text{ص} + 3\text{ع} = 0$ $\Leftarrow$ $\vec{n}_{\text{ص}} = (1 , -5 , 3)$

$\because$ $\text{جتا}\,\theta = \dfrac{|\vec{n}_{\text{س}} \bullet \vec{n}_{\text{ص}}|}{\|\vec{n}_{\text{س}}\| \, \|\vec{n}_{\text{ص}}\|}$ $\Leftarrow$ $\text{جتا}\,\theta = \dfrac{\sqrt{7}}{5}$ $\Leftarrow$ $\theta = 58{,}05^\circ$

②

$\because$ سـ: $2\text{س} - \text{ص} + 7 = 0$ $\Leftarrow$ $\vec{n}_{\text{س}} = (2 , -1 , 0)$

$\because$ ل: $\dfrac{\text{س} - 1}{2} = \dfrac{\text{ص} + 3}{-1} = \dfrac{\text{ع}}{5}$ $\Leftarrow$ $\vec{\text{هـ}} = (2 , -1 , 5)$

$\because$ $\text{جتا}(90 - \theta) = \dfrac{|\vec{n}_{\text{س}} \bullet \vec{\text{هـ}}|}{\|\vec{n}_{\text{س}}\| \, \|\vec{\text{هـ}}\|}$ $\Leftarrow$ $\text{جا}\,\theta = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ $\Leftarrow$ $\theta = 24{,}09^\circ$

---

(٢٠) $\because$ سـ: $3\text{س} + 6\text{ص} + 6\text{ع} - 4 = 0$ $\Leftarrow$ $\vec{n}_1 = (3 , 6 , 6)$

$\because$ صـ: $\text{س} + 2\text{ص} + 2\text{ع} - 1 = 0$ $\Leftarrow$ $\vec{n}_2 = (1 , 2 , 2)$

$\because$ $\dfrac{3}{1} = \dfrac{6}{2} = \dfrac{6}{2}$ $\Leftarrow$ سـ // صـ

لإيجاد البعد بين المستويين نوجد نقطة فى آحد المستويين ثم نوجد بعدها عن المستوى الآخر كما يلى

نوجد نقطة على المستوى صـ مثلاً و ذلك بإختيار قيمة لـ ص ، قيمة لـ ع ونحسب قيمة س

بوضع ص = ع = ٠ فى معادلة المستوى صـ $\Leftarrow$ س = ١ $\Leftarrow$ النقطة (١ , ٠ , ٠)

$\therefore$ نوجد بعد النقطة (١ , ٠ , ٠) عن المستوى سـ

$\because$ $\text{ل} = \dfrac{|\text{أ}\text{س}_1 + \text{ب}\text{ص}_1 + \text{جـ}\text{ع}_1 + \text{د}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2}}$ $\Leftarrow$ $\text{ل} = \dfrac{|3 \times 1 + 6 \times 0 + 6 \times 0 - 4|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2}}$

$\because$ $\text{ل} = \dfrac{|3 - 4|}{\sqrt{9 + 36 + 36}}$ $\Leftarrow$ $\text{ل} = \dfrac{1}{9}$

حل آخر :

$\because$ سـ: $\text{س} + 2\text{ص} + 2\text{ع} - \frac{4}{3} = 0$ ، صـ: $\text{س} + 2\text{ص} + 2\text{ع} - 1 = 0$

$\therefore$ $\text{ل} = \dfrac{|-\frac{4}{3} - (-1)|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \dfrac{1}{9}$

---

(٢١) نوجد المعادلة البارامترية المستقيم ب جـ :

هـ = جـ − ب ⇐ هـ = (٦ , −٤ , ٢) ⇐ س = ١+٦ك ، ص = ٢−٤ك ، ع = ٣+٢ك

نفرض أن مسقط النقطة أ على ب جـ هو النقطة د(١+٦ك , ٢−٤ك , ٣+٢ك)

∴ أد = (١+٦ك , −٧−٤ك , −٣+٢ك)

∵ أد ⊥ ب جـ ⇐ أد • ب جـ = ٠

∴ (١+٦ك , −٧−٤ك , −٣+٢ك) • (٦ , −٤ , ٢) = ٠ ⇐ ك = $\frac{-١}{٢}$ ⇐ د(−٢ , ٤ , ٢)

---

(٢٢) ∵ س = ٢+٣ك ، ص = −٤ك ، ع = ٥+ك ... (١) ، ٤س + ٥ص − ٢ع = ١٨ ... (٢) بالتعويض من (١) فى (٢)

∴ ٤(٢ + ٣س) + ٥(−٤ك) − ٢(٥ + ك) = ١٨ ⇐ ك = −٢

بالتعويض فى (١) ⇐ س = −٤ ، ص = ٨ ، ع = ٣ ⇐ النقطة هى (−٤ ، ٨ ، ٣)

∵ هـ = (٣ ، −٤ ، ١) ، ن = (٤ ، ٥ ، −٢) ⇐ جا θ = $\frac{|(٣ , -٤ , ١)\bullet(٤ , ٥ , -٢)|}{\sqrt{٢٦} \times \sqrt{٤٥}}$

∴ جا θ = $\frac{\sqrt{١٣٠}}{٣٩}$ ⇐ θ ≃ ١٧°

---

(٢٣) ∵ المستقيم ر١ = (١, ٢, ٤)+ك١ (٤, ١, ١١) محتوى فى المستوى المطلوب

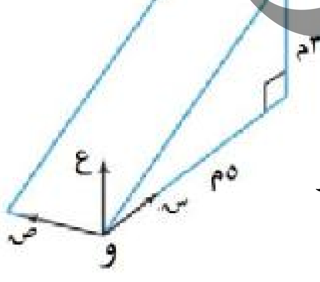
∴ النقطة (١, ٢, ٤) ∈ للمستوى المطلوب.

∵ ر٢ = (٤, ١٥, ٨)+ك٢ (٢, ٣, −١) ⊥ المستوى المطلوب

∴ المتجه العمودى للمستوى المطلوب هو ن = (٢, ٣, −١)

∴ معادلة المستوى هى : (٢, ٣, −١)•ر = (٢, ٣, −١)•(١, ٢, ٤) ⇐ ٢س+٣ص − ع = ٤

---




(٢٤) من الشكل : و(٠ ، ٠ ، ٠) ، أ(٥ ، ٠ ، ٣) ، ب(٥ ، ٢ ، ٣)

ن = وأ × وب ⇐ ن = (−٦ ، ٠ ، ١٠)

معادلة المستوى المائل: ⇐ (−٦, ٠, ١٠)•ر = (−٦, ٠, ١٠)•(٠, ٠, ٠)

⇐ −٦س + ١٠ع = صفر ⇐ ٣س − ٥ ع = صفر

---

**(٢٥)**

∵ س + ع = ٠ ⟸ $\boxed{\text{س} = -\text{ع}}$ ...(١)

∵ س+ص+ع = ١ بالتعويض من (١) ⟸ $\boxed{\text{ص} = ١}$ ...(٢)

∴ مجموعة حل المعادلتين = {(− ع , ١ , ع) : ع∈ح} بوضع ع = ك

∴ س = − ك ، ص = ١ ، ع = ك " المعادلة البارامترية لخط تقطع المستويين"

---

**(٢٦)** ∵المستوى يحتوي المستقيم ل١ ⟸ النقطة أ(٠ , ٣ , −٥) ∈المستوى

∵ $\overleftarrow{\text{هـ}_١}$ = (٦ , −٢ , −١) ، $\overleftarrow{\text{هـ}_٢}$ = (١ , −٣ , ٣) ⟸ $\overleftarrow{\text{ن}}$ = $\overleftarrow{\text{هـ}_١}$ × $\overleftarrow{\text{هـ}_٢}$ = −٩$\overleftarrow{\text{س}}$ − ١٩$\overleftarrow{\text{ص}}$ − ١٦$\overleftarrow{\text{ع}}$

∴ (−٩ , −١٩ , −١٦) · $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (−٩ , −١٩ , −١٦) · (٠ , ٣ , −٥)

∴ ٩ س + ١٩ ص + ١٦ ع + ٢٣ = ٠

---

**(٢٧)** إوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٤ ، ١) و عمودى على المستوى ٣س − ص + ٥ع = ٧٧

∵ المستقيم ⊥ المستوى ⟸ $\overleftarrow{\text{هـ}}$ = $\overleftarrow{\text{ن}}$ = (٣ ، −١١ ، ٥)

∴ معادلة المستقيم : $\frac{\text{س} - ٢}{٣} = \frac{\text{ص} - ٤}{-١} = \frac{\text{ع} - ١}{٥}$

---

**(٢٨)** أقرب نقطة على المستوى من النقطة ب هى مسقط النقطة ب على المستوى

نوجد المعادلة البارمترية للمستقيم المار بالنقطة ب، عمودى على المستوى أى أن $\overleftarrow{\text{هـ}}$ = (٢ ، ١ ، −٢)

س = ١+٢ك ، ص = ك ، ع = −١−٢ك بالتعويض فى معادلة المستوى

٢(١+ ٢ك) + ك −٢(−١ −٢ك) = ١ ⟸ ك = $\frac{-١}{٣}$ ⟸ النقطة أ ($\frac{١}{٣}$ , $\frac{-١}{٣}$ , $\frac{-١}{٣}$)

---

**(٢٩)** نق = بعد المركز عن المستوى ⟸ نق = $\frac{|٢\times(-٢)+٢\times١+(-١)-٣|}{\sqrt{٤+٤+١}} = ٢$

(س + ٢)$^٢$ + (ص − ١)$^٢$ + (ع + ١)$^٢$ = ٤ ⟸ س$^٢$ + ص$^٢$ + ع$^٢$ +٤س −٢ص +٢ع + ٢ = ٠

---

**(٣٠)** ∵ $\overleftarrow{\text{ن}_\text{س}}$ = (١ , −١ , ١) ، $\overleftarrow{\text{ن}_\text{ص}}$ = (٢ , ١ , ١)

∵ المستوى المطلوب ⊥ س ، ص ⟸ $\overleftarrow{\text{ن}}$ = $\overleftarrow{\text{ن}_\text{س}}$ × $\overleftarrow{\text{ن}_\text{ص}}$ ⟸ $\overleftarrow{\text{ن}}$ = (−٢ , ١ , ٣)

∴ (−٢ , ١ , ٣) • $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (−٢ , ١ , ٣) • (١ , −١ , ١) ⟸ $\boxed{(-٢ , ١ , ٣) \bullet \overleftarrow{\text{ر}} = ٠}$

∴ $\boxed{-٢(\text{س} - ١) + (\text{ص} + ١) + ٣(\text{ع} - ١) = ٠}$ الصورة القياسية.

∴ $\boxed{٢\text{س} - \text{ص} - ٣\text{ع} = ٠}$ الصورة العامة.