الرائد

مراجعة الجبر والهندسة الفراغية

للصف الثالث الثانوى

معلم الرياضيات

أ / محمد ربيع عبد الوهاب

01120464879

مبدأ العد – التباديل – التوافيق

- عند اختيار ر من الاشياء من بين ن من الاشياء
- السحب مع الترتيب = سحب الواحدة تلو الاخرى
- السحب مع عدم الترتيب =السحب دفعة واحدة
- إذا كان عدد طرق إجراء عملية م وعدد طرقة إجراء عملية أخرى ن
  فإن عدد طرق إجراء العمليتين معاً (العملية الاولى و الثانية) = م × ن
  ، عدد طرق أجراء العملية الاولى أو الثانية = م + ن
- في حالة الاحلال و الترتيب ∴ عدد الطرق = $\text{ن}^{\text{ر}}$ حيث ن الكل ، ر الجزء المختار منه

مثلا: تكوين عدد من رقمين من الارقام { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} يساوى =$٥^{٢}$ =٢٥

- في حالة الاحلال وعدم الترتيب(ليس مهم الترتيب) ∴ عدد الطرق = $^{\text{ن}+\text{ر}-١}\text{ق}_{\text{ر}}$

مثلا: توزيع ٣ كرات متماثلة على ٤ صناديق = $^{٤+٣-١}\text{ق}_{٣}$ =٢٠

- في حالة عدم الاحلال والترتيب ∴ عدد الطرق = $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}$

مثلا: عدد طرق وقوف ٤ سيارات في ساحة انتظار به ١٠ أماكن يساوى $^{١٠}\text{ل}_{٤}$ =٥٠٤٠

- في حالة عدم الاحلال ووعدم الترتيب ∴ عدد الطرق = $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$

مثلا: عدد طرق اختيار فريق من ٥ أشخاص من بين ١٢ شخصاً يساوى = $^{١٢}\text{ق}_{٥}$ =٧٩٢

- قانون الجمع $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١} = {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}}$ ، قانون النسبة $\dfrac{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}} = \dfrac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}}$ ،

$$\frac{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{^{\text{ن}-١}\text{ق}_{\text{ر}-١}} = \frac{\text{ن}}{\text{ر}}$$

لتطبيق قانونى الجمع والنسبة شرط ثبات العلم و الدليل يزيد واحد

- إذا كان $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{هـ}}$ فإن ر = هـ أ، ر=ن ، هـ = ن-١ أ، هـ = ن ، ر= ن-١
- إذا كان $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{\text{م}}\text{ق}_{\text{ر}}$ فإن ن=م أ، ر = صفر
-
- إذا كان الدليل غير معلوم غالباً ما نستخدم الفك بالمضروب
- عدد طرق جلوس ر من الاشياء المتجاورة مع تحديد نقطة بداية على ن من الاشياء على شكل دائرة = ن $\underline{|\text{ر}}$
- عدد طرق جلوس ر من الاشياء المتجاورة على ن من الاشياء على شكل صف = (ن − ر + ١) $\underline{|\text{ر}}$
- عدد طرق جلوس ر من الاشياء على ر من الاشياء على شكل دائرة = $\underline{|\text{ر} - ١}$
- عدد طرق جلوس ر من الاشياء على ر من الاشياء على شكل صف = $\underline{|\text{ر}}$

نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب

- مفكوك ذات الحدين $(س+ء)^{ن}$

$$= س^{ن} + {}^{ن}ق_{١}\, أ\, س^{ن-١} + {}^{ن}ق_{٢}\, أ^{٢} س^{ن-٢} + {}^{ن}ق_{ر}\, أ^{ر} س^{ن-ر} + ... + أ^{ن}$$

عدد حدود المفكوك = ن +١ ، قوى الحد الاول تتناقص بينما قوى العدد الثانى تزداد

إذا كانت ، ن زوجى فأن عدد الحدود فردى ويكون حد أوسط واحد ترتيبه = $\frac{ن+٢}{٢}$

، إذا كانت ، ن فردى فأن عدد الحدود زوجى ويكون حدان أوسطان ترتيبهما = $\frac{ن+١}{٢}$ ، $\frac{ن+٣}{٢}$

- **الحد العام** $ع_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\, أ^{ر} س^{ن-ر}$ **=** $^{ن}ق_{ر}$ **×(الثانى)^{ر} × (الاول)^{الفرق}**
- **قاعدة** $(س+أ)^{ن} + (س-أ)^{ن} = ٢(ع_{١} + ع_{٣} + ع_{٥} + ...)$ **= ضعف الحدود الفردية**
- **قاعدة** $(س+أ)^{ن} - (س-أ)^{ن} = ٢(ع_{٢} + ع_{٤} + ع_{٦} + ...)$ **= ضعف الحدود الزوجية**

إيجاد الحد المشتمل على س^{ك} من مفكوك ذات الحدين

- **نوجد الحد العام ونقارن قوى س فيه بالمطلوب أو نستخدم أفكار أخرى حسب السؤال**
- **لايجاد الحد الخالى من س نوجد الحد العام ونضع أس س بالصفر ويوجد افكار اخرى**
- **الحد العام** $ع_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\, أ^{ر} س^{ن-ر}$ **=** $^{ن}ق_{ر}$ **×(الثانى)^{ر} × (الاول)^{الفرق}**
- **قاعدة** $(س+أ)^{ن} + (س-أ)^{ن} = ٢(ع_{١} + ع_{٣} + ع_{٥} + ...)$ **= ضعف الحدود الفردية الرتبة**
- **قاعدة** $(س+أ)^{ن} - (س-أ)^{ن} = ٢(ع_{٢} + ع_{٤} + ع_{٦} + ...)$ **= ضعف الحدود الزوجية الرتبة**
- **لمعرفة الحد الخالى من س بسرعة =** $\frac{\text{أس المفكوك × أس الرمز فى الحد الاول}}{\text{أس الرمز فى الحد الاول – أس الرمز فى الحد الثانى}} + ١$

مثلا **الحد الخالى من س فى المفكوك** $\left(س^{٢} - \frac{١}{س^{٤}}\right)^{١٢}$ **رتبتة** $\frac{١٢×٢}{٢-(-٤)} + ١ = \frac{٢٤}{٦} + ١ = ٤ + ١ = ٥$

النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين

- **الحد العام** $ع_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\, أ^{ر} س^{ن-ر}$ **=** $^{ن}ق_{ر}$ **× (الاول)$^{العلم-الدليل}$ ×(الثانى)^{الدليل}**

- قانون النسبة بين حدين متتاليين $\frac{ع_{ر+1}}{ع_{ر}} = \frac{ن - ر + 1}{ر} \times \frac{أ}{س}$

$= \frac{\text{ن–الاصغر+١}}{\text{الاصغر}} \times \frac{\text{الثانى}}{\text{الاول}}$

- النسبة بين معاملى حدين متتاليين = $\frac{\text{ن–الاصغر+١}}{\text{الاصغر}} \times \frac{\text{معامل الثانى}}{\text{معامل الاول}}$
- قاعدة $(س + أ)^{ن} + (س - أ)^{ن} = ٢(ع_{١} + ع_{٣} + ع_{٥} + ...)$ **= ضعف الحدود الفردية**
- قاعدة $(س + أ)^{ن} - (س - أ)^{ن} = ٢(ع_{٢} + ع_{٤} + ع_{٦} + ...)$ **= ضعف الحدود الزوجية**
- **لايجاد عدديا اكبر حد فى مفكوك نحل المتباينة** $\frac{ع_{ر+1}}{ع_{ر}} = \frac{ن - ر + 1}{ر} \times \left|\frac{أ}{س}\right| \geq ١$
- **لايجاد مجموع المعاملات فى اى مفكوك نضع المتغيرات بـ ١ و نحسب**
-

الصورة المثلثية للعدد المركب

- **الصورة المثلثية للعدد المركب ع=ل(جتاθ + ت جاθ)**
- **سعة العدد المركب θ∋ [–π ، π] ولعمل ذلك اذا كانت اكبر من ١٨٠ نطرح منها ٣٦٠ أو نضيف حتى يكون θ∋ [–π ، π]**
- **اذا كان العدد ليس على الصورة المثلثية نحدد الربع الذى يقع فيه اذا كان ضبط اشارة فى الربع الثانى نستخدم π - θ ، فى الربع الثالث - π +θ فى الربع الرابع –θ حيث θ الزاوية الحادة**
- **اذا كان العدد ليس على الصورة المثلثية نحدد الربع الذى يقع فيه اذا كان ضبط جا ، جتا نستخدم فى الربع الثانى نستخدم** $\frac{\pi}{٢}$ **+θ ، فى الربع الثالث -** $\frac{\pi}{٢}$ **-θ فى الربع الرابع -** $\frac{\pi}{٢}$ **+θ حيث θ الزاوية الحادة**
- **الصورة الاسية للعدد المركب** $\left(ل\ هـ^{\theta ت}\right)$ **لابد أن تكون الزاوية بالتقدير الدائرى وللتحويل نستخدم** $\frac{س^{\circ}}{١٨٠^{\circ}} \times \pi$
- **نتائج:**

❶ إذا كان ع=ل(جتاθ + ت جاθ) فإن

(أ) $\frac{١}{ع} = \frac{١}{ل}$ **(جتا(-θ) + ت جا(-θ))** **(ب) $ع^{٢}=ل^{٢}$(جتا٢θ + ت جا٢θ)**

❷ إذا كان $ع_{١}$ = $ل_{١}$(جتا$θ_{١}$ + ت جا$θ_{١}$) ، $ع_{٢}$ =$ل_{٢}$(جتا$θ_{٢}$ + ت جا$θ_{٢}$)

فإن $ع_{١}$× $ع_{٢}$= $ل_{١}$ $ل_{٢}$ (جتا($θ_{١}$ +$θ_{٢}$) + ت جا($θ_{١}$ +$θ_{٢}$))

نظرية ديموافر

- تذكر ١ = حا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ = (جاهـ + ت جتاهـ) (جاهـ - ت جتاهـ)
- نظرية ديموافر : إذا كان ن عدد صحيح موجب فإن $(\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta)^{ن} = \text{جتا}\,ن\theta + \text{ت جا}\,ن\theta$
- نظرية ديموافر : باس عدد نسبى موجب

$$(\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta)^{\frac{١}{ك}} = \text{جتا}\,(\frac{\theta + ٢\pi ن}{ك}) + \text{ت جا}\,(\frac{\theta + ٢\pi ن}{ك})$$

حيث ن ∋ { ٠ ، ١ ، ... ك- ١ }

- جتاس = $\frac{هـ^{تس} + هـ^{-تس}}{٢}$ ، جاس = $\frac{هـ^{تس} - هـ^{-تس}}{٢ت}$ مفيدة للتكاملات
- الجذور النونية للمعادلة س^{ن}=م حيث م عدد مركب يكون لها ن من الجذور على الصورة س=أ$^{\frac{١}{ن}}$
- تحسب الجذور بعد كتابة العدد بالصورة الاسية أو المثلثية

الجذور النونية للعدد المركب تمثل على شكل ارجاند على دائرة واحدة مركزها نقطة الاصل وطول نصف قطرها $|أ|^{\frac{١}{ن}}$ وتكون رؤوس مضلع منتظم عدد أضلاعه ن

- فكرة لايجاد الجذرين التربيعين للعدد المركب (تستخدم فى اختر)

∴ الجذرين هما ± $\left[\sqrt{\frac{ل + س}{٢}} + \text{ت}\sqrt{\frac{ل - س}{٢}}\right]$ حيث ل مقياسه ، س جزءه الحقيقى

- جتاس + جتاص = ٢جتا $\frac{س + ص}{٢}$ جتا $\frac{س - ص}{٢}$
- جتاس - جتاص = ٢جا $\frac{س + ص}{٢}$ جا $\frac{س - ص}{٢}$
- جاس + جاص = ٢ جا $\frac{س + ص}{٢}$ جتا $\frac{س - ص}{٢}$
- جاس - جاص = ٢ جا $\frac{س - ص}{٢}$ جتا $\frac{س + ص}{٢}$
- جا س + جاص = ٢ جا (نصف المجموع) جتا (نصف الفرق)
- جا س - جاص = ٢ جا (نصف الفرق) جتا (نصف المجموع)
- جتاس + جتاص = ٢ جتا (نصف المجموع) جتا (نصف الفرق)
- جتاس - جتاص = ٢ جا (نصف المجموع) جا (نصف الفرق)
-

المحددات

- فك المحدد عن طريق أحد صفوفه أو اعمدته لا يغير من قيمة المحدد

- ضرب أحد صفوف (أو اعمدة) المحدد فى رقم والجمع على الصف(أو العمود) المناظر لا يغير من قيمته
- عند أخذ عامل مشترك أو ضرب المحدد فى رقم يكون ذلك على صف أو عمود فقط
- لا تتغير قيمة المحدد عند تبديل صفوف المحدد باعمدته المناظرة بنفس الترتيب (مدور المحدد)
- قيمة المحدد لا تتغير بفكه عن طريق عناصر أى صف(عمود)
- قيمة المحدد تنعدم إذا كان جميع عناصر اى صف او عمود تساوى صفر
- قيمة المحدد تنعدم اذا تساوت العناصر المناظرة لاى صفين أو عمودين
- إذا وجد عامل مشترك فى جميع عناصر صف(عمود) فى محدد فإن هذا العامل يمكن اخذه خارج المحدد
- إذا بدلنا موضعى صفين(عمودين) فإن قيمة المحدد الناتج = سالب قيمة المحدد الاصلى
- اذا كتبت جميع عناصر أى صف (عمود) كمجموع عنصرين فإنه يمكن كتابة المحدد الاصلى على صورة مجموع محددين (تجزئى المحدد)
- اذا اضفنا لعناصر اى صف(عمود) بمحدد مضاعفات عناصر أى صف (عمود) أخر فإن قيمة المحدد لا تتغير
- فى أى محدد اذا ضربنا عناصر أى صف(عمود) فى العوامل المرافقة للعناصر المناظرة فى أى صف(عمود) آخر ثم جمعنا نواتج الضرب فإن الناتج يكون مساوياً صفرا
- قيمة المحدد على الصورة المثلثية (به مثلث اصفار) تساوى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى أو سالب حاصل ضرب عناصر القطر غير الرئيسى
-

المصفوفات

- شرط وجود معكوس ضربى للمصفوفة هو محددها لا ينعدم
- لايجاد المعكوس الضربى للمصفوفة $\text{أ}^{-1} = \frac{1}{|\text{أ}|}\,\text{م}^{\text{مل}}$ حيث $\text{م}^{\text{مل}}$ مصفوفة العوامل المرافقة
- رتبة المصفوفة هى رتبة أكبر محدد فيها قيمته لا تساوى الصفر
- محدد عدد مضروب فى مصفوفة على ٣×٣ يساوى العدد^{٣} × محددها

قاعدة إذا كانت م مصفوفة على النظم ن×ن فإن $|\text{ك م}| = \text{ك}^{\text{ن}}\,|\text{م}|$

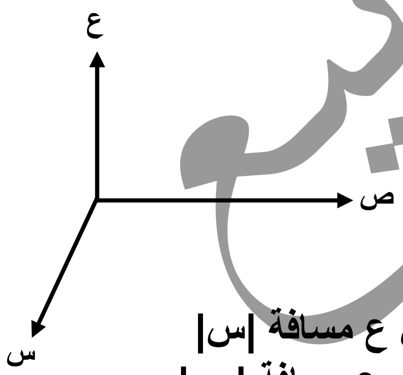
- ضرب عدد فى مصفوفة يضرب فى كل عناصرها بينما ضرب عدد فى محدد يضرب فى صف أو عمود فقط
- عامل مشترك من المصفوفة : من كل العناصر بينما عامل مشترك من محدد من صف أو عمود
- المصفوفة المنفردة (الشاذة) التى ليس لها معكوس ضربى وغير المنفردة (غير الشاذة) لها معكوس ضربى
- المصفوفة المنفردة محددها = صفر ، غير المنفردة محددها ≠ صفر
- $(\text{أب})^{-1} = \text{ب}^{-1}\text{أ}^{-1}$ ، $(\text{أ}^{-1})^{-1} = \text{أ}$ ، $(\text{أ}^{-1})^{\text{مد}} = (\text{أ}^{\text{مد}})^{-1}$ ، $(\text{أ}^{-1})^{٢} = (\text{أ}^{٢})^{-1}$ ، $I^{-1} = I$

•

حل المعادلات الخطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

- إذا كانت رتبة المصفوفة أ = رتبة المصفوفة الموسعة = عدد المجاهيل ∴ **حل وحيد**
- إذا كانت رتبة المصفوفة أ = رتبة المصفوفة الموسعة < عدد المجاهيل ∴ **عدد لانهائى من الحلول**
- إذا كانت رتبة المصفوفة أ ≠ رتبة المصفوفة الموسعة ∴ **لا يوجد حلول**
- المعنى الهندسى لمجموعة حل ثلاث معادلات فى ثلاث مجاهيل
  كل معادلة تمثل مستوى ولذلك حل وحيد معناه الثلاث مستويات تتقاطع فى نقطة
  عدد لانهائى من الحلول ∴ الثلاث مستويات منطبقة
  لا يوجد حلول ∴ الثلاث مستويات متوازية
- **المعادلات المتجانسة جميع عناصر مصفوفة الثوابت صفر وعلى الاقل لها حل واحد**
- مرتبة المصفوفة غير الصفرية هى أعلى درجة لمحدد أو محدد أصغر للمصفوفة قيمته لا تساوى صفر فإذا كانت المصفوفة أ غير صفرية على النظم م × ن حيث م ≥ ن فإن مرتبة المصفوفة أ نرمز لها بالرمز ر(أ) حيث ١ ≤ ر(أ) ≤ ن
- عند ايجاد مرتبة المصفوفة تذكر خواص المحدادت لتسريع ايجاد رتبة المصفوفة
- مرتبة مصفوفة الوحدة هو درجتها
- مرتبة المصفوفة الصفرية = صفر ، مرتبة المصفوفة = مرتبة مدورها
- إذا اضيف (أوحذف) صف(عمود) صفرى على المصفوفة فإن رتبتها لا تتغير
- إذا اضيف (أوحذف) صف(عمود) عبارة عن تجميع لعدة صفوف (أعمدة) فإن مرتبة المصفوفة لا تتغير
- **اسهل طريقة لايجاد مرتبة المصفوفة هو اجراء عمليات الصف البسيط على المصفوفة الموسعة فمن السهل ايجاد رتبة المصفوفة والمصفوفة الموسعة**

ثانيا الهندسة الفراغية



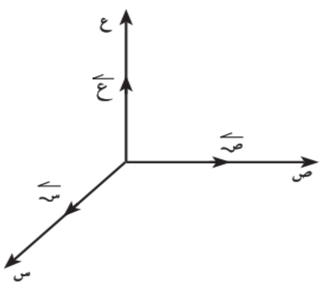
النظام الاحداثى المتعامد فى ثلاث أبعاد

- نقطة الاصل (٠ ، ٠ ، ٠)
  يجب رسم مستوى الاحداثيات طبقاً لقاعدة اليد اليمنى كما بالشكل
- النقطة (س ، ٠ ، ٠) تقع على محور السينات وتبعد عن المستوى ص ع مسافة |س|
  ، النقطة (٠ ،ص ،٠) تقع على محور الصادات وتبعد عن المستوى س ع مسافة |ص|
  ، النقطة (٠ ، ٠ ،ع) تقع على محور العينات وتبعد عن المستوى س ص مسافة |ع|
- بعد النقطة (س ، ص ، ع) عن محور السينات = $\sqrt{ص^2 + ع^2}$ لكن بعدها عن المستوى ص ع =|س|
  وبعدها عن محور الصادات = $\sqrt{س^2 + ع^2}$ لكن بعدها عن المستوى س ع =|ص|

- معادلة المستوى س ص هى ع=٠ ، معادلة المستوى ص ع هى س=٠ ، معادلة المستوى س ع هى ص=٠
- البعد بين النقطتين ٲ(س١ ، ص١ ، ع١) ، ب(س٢ ، ص٢ ، ع٢)
يساوى $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$
- احداثى نقطة المنتصف بين بين النقطتين ٲ(س١ ، ص١ ، ع١) ، ب(س٢ ، ص٢ ، ع٢)
هو $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} ، \frac{ع_١ + ع_٢}{٢}\right)$
- نقطة متوسطات المثلث الذى رؤوسه ٲ(س١ ، ص١ ، ع١) ، ب(س٢ ، ص٢ ، ع٢)
، جـ(س٣ ، ص٣ ، ع٣) هى $\left(\frac{س_١ + س_٢ + س_٣}{٣} ، \frac{ص_١ + ص_٢ + ص_٣}{٣} ، \frac{ع_١ + ع_٢ + ع_٣}{٣}\right)$
- معادلة الكرة التى مركزها (ل، ك ، ن) و طول نصف قطرها نق هى
الصورة القياسية (س-ل)^٢ + (ص- ك)^٢ +(ع- ن)^٢ = نق^٢
- الصورة العامة: س^٢ + ص^٢ + ع^٢ +٢ل س + ٢ك ص +٢ن ع + ء =٠
حيث مركزها (-ل ، - ك ، - ن) وطول نصف قطرها نق = $\sqrt{ل^٢ + ك^٢ + ن^٢ - ء}$
نلاحظ على معادلة الدائرة معامل س^٢ =معامل ص^٢=معامل ع^٢=١ ، لاتشتمل على الحدود س ص ، ص ع ، س ع ، وبشرط $ل^٢ + ك^٢ + ن^٢ - ء > ٠$
-

المتجهات فى الفراغ

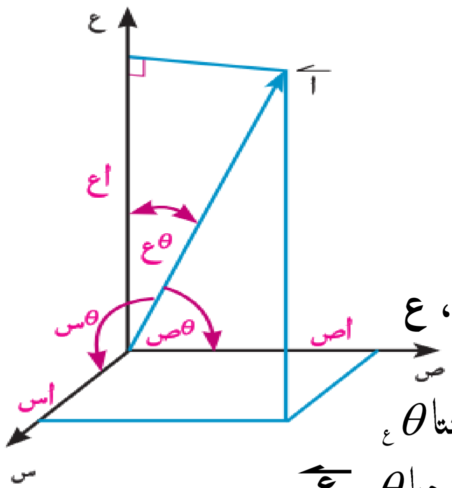
- متجة الموضع للمتجه $\overrightarrow{ٲ}$ =($ٲ_س$ ، $ٲ_ص$ ، $ٲ_ع$) وتسمى $ٲ_س$ بمركبة المتجة فى اتجاه محور س ، $ٲ_ص$ بمركبة المتجة فى اتجاه محور ص ، $ٲ_ع$ بمركبة المتجة فى اتجاه محور ع
- معيار المتجه $\overrightarrow{ٲ}$ =($ٲ_س$ ، $ٲ_ص$ ، $ٲ_ع$)= طول القطعة المستقيمة الموجهة = $\sqrt{ٲ_س^٢ + ٲ_ص^٢ + ٲ_ع^٢}$
- جمع المتجهات إذا كان $\overrightarrow{ٲ}$ =($ٲ_س$ ، $ٲ_ص$ ، $ٲ_ع$) ، $\overrightarrow{ب}$ =($ب_س$ ، $ب_ص$ ، $ب_ع$) فإن
$\overrightarrow{ٲ}$ + $\overrightarrow{ب}$ =($ٲ_س$ ، $ٲ_ص$ ، $ٲ_ع$) +($ب_س$ ، $ب_ص$ ، $ب_ع$)=($ٲ_س + ب_س$ ، $ٲ_ص + ب_ص$ ، $ٲ_ع + ب_ع$)
- ضرب عدد فى متجة ك $\overrightarrow{ٲ}$ =($ٲ_س$ ، $ٲ_ص$ ، $ٲ_ع$) =(ك$ٲ_س$ ، ك$ٲ_ص$ ، ك$ٲ_ع$)
- تساوى متجهين إذا كان ($ٲ_س$ ، $ٲ_ص$ ، $ٲ_ع$)=($ب_س$ ، $ب_ص$ ، $ب_ع$)
∴ $ٲ_س = ب_س$ ، $ٲ_ص = ب_ص$ ، $ٲ_ع = ب_ع$
- متجة الوحدة هو متجه معياره وحدة الاطوال ، متجه الوحدة للمتجه للمتجة $\overrightarrow{ٲ}$ =($ٲ_س$ ، $ٲ_ص$ ، $ٲ_ع$)
هو $\left(\frac{ٲ_س}{\|\overrightarrow{ٲ}\|} ، \frac{ٲ_ص}{\|\overrightarrow{ٲ}\|} ، \frac{ٲ_ع}{\|\overrightarrow{ٲ}\|}\right)$
- متجهات الوحدة الاساسية $\overrightarrow{س}$=(١ ، ٠ ، ٠) ، $\overrightarrow{ص}$=(٠ ، ١ ، ٠)



، $\overrightarrow{ع} = (٠ ، ٠ ، ١)$

- $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

- **زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه لمتجه فى الفراغ**



إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ متجه فى الفراغ

وكانت $(\theta_س ، \theta_ص ، \theta_ع)$ قياسات الزوايا التى

يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحاور س ، ص ، ع

على الترتيب فإن:

$أ_س = \|\overrightarrow{أ}\| جتا \theta_س$ ، $أ_ص = \|\overrightarrow{أ}\| جتا \theta_ص$ ، $أ_ع = \|\overrightarrow{أ}\| جتا \theta_ع$

، $\overrightarrow{أ} = \|\overrightarrow{أ}\| جتا \theta_س \overrightarrow{س} + \|\overrightarrow{أ}\| جتا \theta_ص \overrightarrow{ص} + \|\overrightarrow{أ}\| جتا \theta_ع \overrightarrow{ع}$

$(\theta_س ، \theta_ص ، \theta_ع)$ تسمى زوايا الاتجاه للمتجة $\overrightarrow{أ}$ ولايجادها نوجد متجه الوحدة فى اتجاهه $= \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|}$

كل مركبة تعبر عن $جتا \theta_س$ ، $جتا \theta_ص$ ، $جتا \theta_ع$

- **لاحظ أن $جتا \theta_س \overrightarrow{س} + جتا \theta_ص \overrightarrow{ص} + جتا \theta_ع \overrightarrow{ع}$ تمثل متجه الوحدة فى اتجاه المتجة $\overrightarrow{أ}$ أى أن**

$جتا^٢ \theta_س + جتا^٢ \theta_ص + جتا^٢ \theta_ع = ١$

ضرب المتجهات

- **حاصل الضرب القياسى $\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\|$ جتاθ حيث θ الزاوية الحادة بين المتجهين بشرط أن يكونا داخلين أو خارجين من نقطة التقاطع**
- **شرط تعامد متجهين هو $\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ب}$ = صفر بينما شرط التوازى $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{٠}$ ، أ، $\overrightarrow{أ} = ك \overrightarrow{ب}$**
- **إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\overrightarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$ $\therefore \overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ب} = أ_س ب_س + أ_ص ب_ص + أ_ع ب_ع$**
- **مركبة $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ب} = \frac{\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{ب}\|} = \|\overrightarrow{أ}\|$ جتاθ**
- **$\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{أ} = \|\overrightarrow{أ}\|^٢$ بينما $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{٠}$**
- **إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\overrightarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$ شرط التوازى $\frac{أ_س}{ب_س} = \frac{أ_ص}{ب_ص} = \frac{أ_ع}{ب_ع}$**
- $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \end{vmatrix}$

$= (أ_ص ب_ع - أ_ع ب_ص) \overrightarrow{س} - (أ_س ب_ع - أ_ع ب_س) \overrightarrow{ص} + (أ_س ب_ص - أ_ص ب_س) \overrightarrow{ع}$

أ$_{ص}$ ب$_{ع}$ − أ$_{ع}$ ب$_{ص}$ =المركبة فى اتجاه محور س لاحظ (أ$_{س}$ ، أ$_{ص}$ ، أ$_{ع}$)،(ب$_{س}$ ، ب$_{ص}$ ، ب$_{ع}$)

- (أ$_{س}$ ب$_{ع}$ − أ$_{ع}$ ب$_{س}$)=المركبة فى اتجاه محور ص لاحظ (أ$_{س}$ ، أ$_{ص}$ ، أ$_{ع}$)،(ب$_{س}$ ، ب$_{ص}$ ، ب$_{ع}$)

(أ$_{س}$ ب$_{ص}$ − أ$_{ص}$ ب$_{س}$)=المركبة فى اتجاه محور ع لاحظ (أ$_{س}$ ، أ$_{ص}$ ، أ$_{ع}$)،(ب$_{س}$ ، ب$_{ص}$ ، ب$_{ع}$)

- قياس الزاوية بين متجهين جتاθ = $\frac{\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{أ}\|\,\|\overrightarrow{ب}\|}$ لاتنسى داخلين أو خارجين ، $\theta \in [٠ ، \pi]$

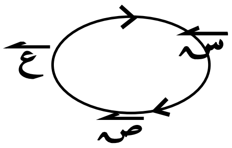
حالات خاصة:

① جتاθ = ١ ∴ $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان فى نفس الاتجاه

② جتاθ =-١ ∴ $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان فى عكس الاتجاه

③ جتاθ =٠ ∴ $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدان

- $\overrightarrow{س} \odot \overrightarrow{س}$ =١ ، $\overrightarrow{س} \odot \overrightarrow{ص}$ = ٠ ، .... $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{س}$ = $\overrightarrow{٠}$ ، $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ص}$ = $\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ع}$ = $\overrightarrow{س}$



- الشغل المبذول من القوى التى تؤثر على الجسم فاكسبته ازاحه
$\overrightarrow{ش}$ = $\overrightarrow{ق} \odot \overrightarrow{ف}$ = $\|\overrightarrow{ق}\|\,\|\overrightarrow{ف}\|$ جتاθ
- $\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|$ =مساحة متوازى الاضلاع الذى فيه $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ضلعين متجاورين
= ضعف مساحة المثلث الذى فيه $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ضلعين متجاورين
- الضرب الثلاثى القياسى $\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{ج}$ = $\begin{vmatrix} أ_{س} & أ_{ص} & أ_{ع} \\ ب_{س} & ب_{ص} & ب_{ع} \\ ج_{س} & ج_{ص} & ج_{ع} \end{vmatrix}$ =حجم متوازى السطوح الذى فيه

$\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{ج}$ ثلاث اضلاع متجاورة

لاحظ لا معنى لايجاد الضرب القياسى أولاً ، كذلك الترتيب

- إذا كانت الثلاث متجهات $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{ج}$ فى مستوى واحد فإن $\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{ج}$ = صفر
- متجة الوحدة العمودى على المستوى الذى يحتوى $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ يساوى $\frac{\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|}$
- **حالة خاصة** : إذا كان إذا كان $\overrightarrow{أ}$ =(أ$_{س}$ ، أ$_{ص}$) ، $\overrightarrow{ب}$ =(ب$_{س}$ ، ب$_{ص}$)
فإن $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ =(أ$_{س}$ ب$_{ص}$ − أ$_{ص}$ ب$_{س}$) $\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ب}$ =(أ$_{س}$ ب$_{س}$ + أ$_{ص}$ ب$_{ص}$)

خواص ضرب المتجهات ، ضرب عدد فى متجهة ، ....

معادلة المستقيم فى الفراغ

- متجه اتجاه المستقيم المار بالنقطتين أ(أ$_{س}$ ، أ$_{ص}$ ، أ$_{ع}$) ، ب(ب$_{س}$ ، ب$_{ص}$ ، ب$_{ع}$)
هو $\overrightarrow{هـ}$ = $\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{أ}$

- المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة $\overrightarrow{\text{أ}}$ ومتجه اتجاهه $\overrightarrow{\text{هـ}}$ هى $\overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{أ}} + \text{ك}\,\overrightarrow{\text{هـ}}$
- المعادلات البارامترية من المعادلة المتجهة (س ، ص ، ع) $=$(س$_1$ ،ص$_1$، ع$_1$) + ك(أ ، ب ،جـ)
هى س$=$س$_1$+ ك أ ، ص = ص$_1$ + ك ب ، ع = ع$_1$ + ك جـ
- المعادلة الاحداثية للمستقيم المار بالنقطة (س$_1$ ،ص$_1$، ع$_1$) ومتجه اتجاهه (أ ، ب ،جـ)
هى $\frac{\text{س}-\text{س}_1}{\text{أ}} = \frac{\text{ص}-\text{ص}_1}{\text{ب}} = \frac{\text{ع}-\text{ع}_1}{\text{جـ}}$ عند أ = ٠ تكون المعادلة س = س$_1$ ، $\frac{\text{ص}-\text{ص}_1}{\text{ب}} = \frac{\text{ع}-\text{ع}_1}{\text{جـ}}$
- نسب الاتجاه أ ، ب ، جـ تتناسب مع جيوب تمام الاتجاه ل ، م ، ن فإنه يمكن كتابة الصورة الاحداثية لمعادلة المستقيم على الصورة $\frac{\text{س}-\text{س}_1}{\text{ل}} = \frac{\text{ص}-\text{ص}_1}{\text{م}} = \frac{\text{ع}-\text{ع}_1}{\text{ن}}$
- قياس الزاوية بين المستقيمين الذى متجهى اتجاهيهما $\overrightarrow{\text{هـ}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{هـ}_2}$ جتا $\theta = \frac{|\overrightarrow{\text{هـ}_1} \bullet \overrightarrow{\text{هـ}_2}|}{\|\overrightarrow{\text{هـ}_1}\|\,\|\overrightarrow{\text{هـ}_2}\|}$
- إذا (ل$_1$ ، م$_1$ ، ن$_1$) ، (ل$_2$ ، م$_2$ ، ن$_2$) هى جيوب تمام الاتجاه للمستقيمين
فإن: جتا θ = | ل$_1$ل$_2$ + م$_1$م$_2$ + ن$_1$ن$_2$|
- شرط توازى مستقيمين فى الفراغ $\overrightarrow{\text{هـ}_1} = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{هـ}_2}$
- إذا كان المستقيمان متوازيين وكانت نقطة على أحداهما تحقق الآخر فإن المستقيمين منطبقان
- إذا كان $\overrightarrow{\text{هـ}_1}$ لا يوازى $\overrightarrow{\text{هـ}_2}$ فإن ل$_1$ ، ل$_2$ إما متقاطعان أو متخالفان
- **طول العمود من النقطة ب على المستقيم** $\overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{أ}} + \text{ك}\,\overrightarrow{\text{هـ}}$ يساوى $= \frac{\|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{هـ}}\|}{\|\overrightarrow{\text{هـ}}\|}$
- شرط تخالف مستقيمين فى الفراغ هو عدم التقاطع وعدم التوازى

معادلة المستوى فى الفراغ

- المعادلة المتجهة للمستوى الذى يمر بالنقطة $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، ومتجه عمودى عليه $\overrightarrow{\text{ن}}$
هى $\overrightarrow{\text{ن}} \odot \overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ن}} \odot \overrightarrow{\text{أ}}$
- المعادلة القياسية لمعادلة المستوى $\text{أ}(\text{س}-\text{س}_1)+\text{ب}(\text{ص}-\text{ص}_1)+\text{جـ}(\text{ع}-\text{ع}_1)=0$ حيث
(أ ، ب ، جـ) نسب الاتجاه لمتجه عمودى على المستوى المار بالنقطة (س$_1$ ،ص$_1$، ع$_1$)
- والمعادلة العامة هى أ س + ب ص + جـ ع + ء = ٠ حيث (أ ، ب ، جـ) نسب الاتجاه لمتجه عمودى على المستوى
- لايجاد معادلة المستوى المار بثلاث نقاط يجب التأكد أولاً أن النقط ليست على استقامة واحدة من شرط التوازى ثم نوجد متجه عمودى على مستويهما واى نقطة ونوجد معادلة المستوى
- معادلة المستوى المار بالثلاث نقاط (س$_1$ ،ص$_1$، ع$_1$) ، (س$_2$ ،ص$_2$، ع$_2$) ، (س$_3$ ،ص$_3$، ع$_3$)
هى $\begin{vmatrix} \text{س}-\text{س}_1 & \text{ص}-\text{ص}_1 & \text{ع}-\text{ع}_1 \\ \text{س}_2-\text{س}_1 & \text{ص}_2-\text{ص}_1 & \text{ع}_2-\text{ع}_1 \\ \text{س}_3-\text{س}_1 & \text{ص}_3-\text{ص}_1 & \text{ع}_3-\text{ع}_1 \end{vmatrix}$

أو نوجد متجه وحدة عمودى على مستويهما $\overrightarrow{ن} = \overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{بجـ}$ وناخذه نقطة منهما ونكون المعادلة بالعلاقة $\overrightarrow{ن} \odot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \odot \overrightarrow{أ}$

- **لايجاد معادلة المستوى الذى يحوى مستقيمين متقاطعين نوجد نقطة التقاطع بحل المعادلتين معاً ثم نوجد متجه عمودى على مستويهما $= \overrightarrow{هـ_١} \times \overrightarrow{هـ_٢}$ فيكون هو متجه اتجاه العمودى على المستوى**
- **لايجاد معادلة مستقيم عمودى على مستوى يكون متجه اتجاه المستقيم هو متجه اتجاه العمودى على المستوى**
- **لايجاد معادلة خط تقاطع مستويين نحل المعادلتين**
- **لايجاد نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى نوجد المعادلات البارمترية للمستقيم ونعوض فى معادلة المستوى ينتج ك**
- **قياس الزاوية θ بين المستويين الذى $\overrightarrow{ن_١}$ عمودى على المستوى الاول ، $\overrightarrow{ن_٢}$ عمودى على المستوى الثانى هى** $جتا\theta = \frac{|\overrightarrow{ن_١} \odot \overrightarrow{ن_٢}|}{\|\overrightarrow{ن_١}\| \, \|\overrightarrow{ن_٢}\|}$ **حيث** $٠° \le \theta \le ٩٠°$
- **إذا كان $\overrightarrow{ن_١}$ ، $\overrightarrow{ن_٢}$ متجهى الاتجاه العموديين على المستويين فإن**

❶ شرط توازى مستويين $\overrightarrow{ن_١} \parallel \overrightarrow{ن_٢}$ أى إذا كان $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢}$ أو $\overrightarrow{ن_١} \times \overrightarrow{ن_٢} = \overrightarrow{و}$

❷ شرط تعامد المستويين $\overrightarrow{ن_١} \perp \overrightarrow{ن_٢}$ هو $\overrightarrow{ن_١} \odot \overrightarrow{ن_٢} =$ صفر

- **طول العمود من النقطة ب على المستوى الذى معادلته $\overrightarrow{ن} \odot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \odot \overrightarrow{أ}$ يساوى** $\frac{|\overrightarrow{أب} \odot \overrightarrow{ن}|}{\|\overrightarrow{ن}\|}$ **لاحظ ضرب قياسى بخلاف طول العمود على مستقيم ضرب اتجاهى**
- **طول العمود من النقطة أ(س١ ، ص١ ، ع١) على المستوى أ س + ب ص +جـ ع + د = ٠**

$$= \frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ ع_١ + د|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢}}$$

- **معادلة المستوى الذى يقطع محاور الاحداثيات فى النقط (س١ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ص١ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ع١) فإن معادلة المستوى تكون على الصورة** $\frac{س}{س_١} + \frac{ص}{ص_١} + \frac{ع}{ع_١} = ١$
- **معادلة المستوى المار بخط تقاطع مستويين هى (معادلة المستوى الاول) + ك(معادلة الثانى)=٠**

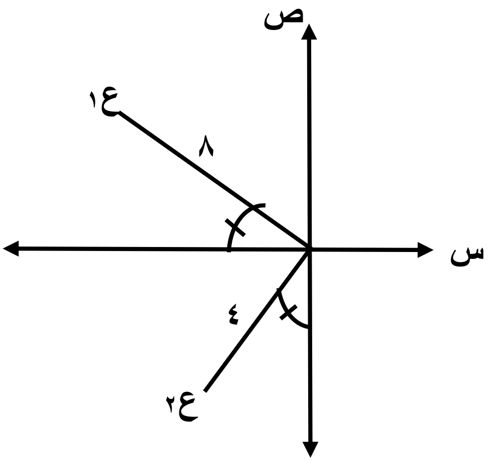
أولا:الاسئلة الموضعية(أختر الاجابة الصحيحة مما بين القوسين)

(بوكلت ١)

[١] اذا قطع المستوى ١٠س + ١٢ص + ٦ع = ٦٠ محاور الاحداثيات س ، ص ، ع فى النقط ٲ ، ب ، جـ على الترتيب فإن حجم المجسم ٲ ب جـ و حيث و نقطة الاصل يساوى ..... وحدة مكعبة

(٢٠ ، ٣٠ ، ٥٠ ، غير ذلك)

[٢] فى الشكل المقابل:



$ع_١$ ، $ع_٢$ عددان مركبان فإن $\frac{ع_١}{ع_٢}$ = ...

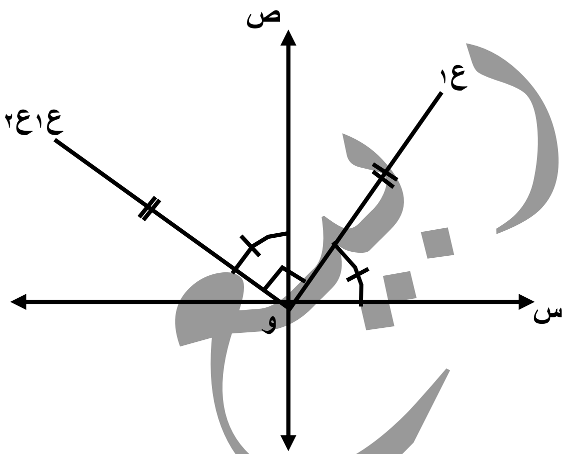
(٢ ، -٢ ، ٢ت ، -٢ت)

[٣] اذا كان $ع_١$ ، $ع_٢$ عددان مركبان سعة $(ع_١ع_٢)$ = $\frac{٥\pi}{١٨}$ ، سعة $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{\pi}{٩}$

فإن سعة $ع_١$ = ... ($\frac{٧\pi}{٣٦}$ ، $\frac{٥\pi}{٣٦}$ ، $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\pi}{٤}$)

[٤] اذا كان عدد حدود مفكوك $(س + ص)^{٢ن-١}$ يساوى ١٢ فإن ن تساوى .... (٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨)

[٥] فى الشكل المقابل:



$ع_١$ ، $ع_٢$ عددان مركبان وكان $(ع_١ع_٢)$ عدد مركب

فإن $ع_٢$ = ...

(-٢ت ، -ت ، ت ، ٢ت)

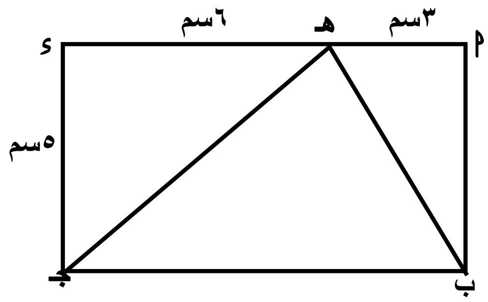
[٦] طول نصف قطر الكرة $س^٢ + ص^٢ + ع^٢$ -٢س -٦ص +١٠ ع -١ = صفر يساوى .... وحدة طول (٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦)

[٧] اذا كان ٲ =(٢ ، -١ ، ٣) ، ب=(-٢ ، ٢ ، -٩) فإن طول ٲ ب = ... وحدة طول

(١٠ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٥)

[٨] اذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ =(٢ ، ٣ ، -٤) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ =(٤ ، ٢ ، م) وكان $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$

فإن قيمة م = ... (١ ، ٢ ، ٣ ، $\frac{٧}{٢}$)



[٩] فى الشكل المقابل: أ ب جـ ء مستطيل ،

هـ $\in \overline{\text{أ ء}}$ فإن $\overrightarrow{\text{هـ ب}} \bullet \overrightarrow{\text{هـ جـ}}$ = ...

(٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠)

[١٠] عدد الطرق التى يمكن تكوين بها فريق من سته اعضاء من بين ثمانية بنات وستة أولاد بحيث يحتوى الفريق على ثلاث أولاد فقط يساوى .... (٢١١٠ ، ١١٢٠ ، ١٠٠٨ ، ٨١٠)

[١١] $\sqrt{٥ + ١٢ت}$ = ... (±(٢+٣ت) ، ±(٣+٢ت) ، ±(٢-٣ت) ، ±(٣-٢ت))

[١٢] اذا كان اطوال اضلاع مثلث هى $\frac{١}{٢}|ن$ ، $|ن - ٢$ ، $|٣ - ن$ من السنتيمترات فإن القيمة العددية لمساحة المثلث = ... سم^٢ ($\sqrt{٣}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ، $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$)

(بوكلت٢)

[١٣] اذا كان الحدان الاوسطان فى مفكوك $\left(س^٢ + \frac{١}{س}\right)^{٢ن+١}$ متساويان فإن س = ...

(١ ، -١ ، ±١ ، ٢)

[١٤] اذا كان $ل^{ن}_{س} = ل^{ن}_{ص}$ حيث س ≠ ص فإن س +ص = ... (٥ ، ٧ ، ٩ ، ١)

[١٥] اذا كان ٣٠ ° ، ٦٠ ° ، θ ° هى زوايا الاتجاه لمتجه فإن إحدى قيم θ = ...

(٠ ° ، ٣٠ ° ، ٦٠ ° ، ٩٠ °)

[١٦] إذا كان المتجهان $\overrightarrow{\text{أ}}$ =(٣ ، ٤ ، ك) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ =(٤ ، ٠ ، -١) متعامدين فإن $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ = ...

(١٩ ، ١٣ ، ١٢ ، ٥)

[١٧] جميع المصفوفات الآتية لها معكوس ضربى ما عدا المصفوفة ....

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$

(جـ) $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٦ \end{pmatrix}$

[١٨] $\begin{vmatrix} \omega & ت \\ ت & \omega \end{vmatrix}$ = ... (١ ، -١ ، ω ، -ω)

[١٩] مرافق العدد ٢ω + ٣ω^{2} هو .... (٢ω-٣ω^{2} ، ٢ω^{2}+٣ω ، ٣ω-٢ω^{2} ، ٢ω+٣ω^{2})

[٢٠] إذا كان المستقيمان $\overleftarrow{ر}$ =(١ ، ٢ ، ٤) + ك(٢ ، -١ ، ١) ، $\frac{س-١}{-٢} = \frac{ص-١}{٧} = \frac{ع-١}{م}$

متعامدين فإن م = ... (١ ، ٥ ، ٦ ، ١١)

[٢١] إذا كان $ل^{ن}_{ر} = ١٢٠$ فإن مجموع قيم ر الممكنة يساوى ..... (٥ ، ١٣ ، ٢٠ ، ١٢٠)

[٢٢] إذا كان $\overleftarrow{أ}$ • $\overleftarrow{ب}$ = $\sqrt{٣}$ || $\overleftarrow{أ}$ × $\overleftarrow{ب}$ || فإن قياس الزاوية بين المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ =.......

(٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° ، ٩٠°)

[٢٣] قياس الزاوية بين المستويين $\overleftarrow{ر}$ • (١ ، ١ ، ٢) =٧ ، ٢س – ص + ع = ٦ تساوى ......

(٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° ، ٩٠°)

[٢٤] مجموع الاجزاء التى يقطعها المستوى ٣س + ٢ص + ٤ع = ١٢ من محاور الاحداثيات ......

(٩ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٧)

(بوكلت٣)

[٢٥] أى القيم التالية يمكن أن تساوى $ل^{ن}_{٣}$ .... (٤٠ ، ١٤٠ ، ٢١٠ ، ٢٨٠)

[٢٦] اذا كان $\overleftarrow{أ}$ =(-١ ، ٤ ، ٣) ، $\overleftarrow{ب}$ =(٢ ، ٢ ، ١) فإن مركبة المتجة $\overleftarrow{أ}$ فى اتجاه المتجه

$\overleftarrow{ب}$ = ... ($\frac{٩}{\sqrt{٢٦}}$ ، $\frac{٣}{\sqrt{٢٦}}$ ، ٣ ، ١)

[٢٧] اذا كان المستقيمان $\frac{س-١}{٢} = \frac{ص+٢}{٣} = \frac{ع-١}{٤}$ ، $\frac{س}{٣} = \frac{ص-٢}{٤} = \frac{ع-١}{ك}$

متعامدين فإن ك = ... ($\frac{-١٩}{٤}$ ، $\frac{-١٧}{٤}$ ، -٤,٥ ، ٤,٥)

[٢٨] طول قطر الكرة التى معادلتها: س^{٢} +ص^{٢} -٦س +٨ص -٤ع + ٤=٠ يساوى ....

وحدة طول (٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠)

[٢٩] عدد طرق اختيار أربعة أحرف على الأقل مختلفة معاً من عناصر المجموعة

{ أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ } هى .... ($ق^{٥}_{٤}+ق^{٥}_{٥}$ ، $ق^{٥}_{٤}\times ق^{٥}_{٥}$ ، $ل^{٥}_{٤}+ل^{٥}_{٥}$ ، $ل^{٥}_{٤}\times ل^{٥}_{٥}$)

[٣٠] حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاثة أحرف متجاورة يمثلها $\overrightarrow{أ}$ =(٣ ، -٤ ، ٠)

، $\overrightarrow{ب}$ =(٠ ، -٤ ، ٣) ، $\overrightarrow{جـ}$ =(٠ ، ٠ ، ٥) يساوى .... وحدة مكعبة (١٢ ، ٥٠ ، ٦٠، ١٢٥)

[٣١] اذا قطع محور السينات الكرة $(س-٢)^٢ + (ص+٣)^٢ + (ع-١)^٢ = ١٤$ فى النقطتين أ ، ب

فإن طول $\overline{أ ب}$ = ... وحدة طول (٢ ، $\sqrt{١٤}$ ، ٤ ، $\sqrt{٢٨}$)

[٣٢] فى مفكوك $(٣س - ٢ص)^{١٣}$ إذا كانت النسبة بين الحدين الأوسطين على الترتيب تساوى $\frac{-٢}{٣}$

فإن ص : س = ... (٩ : ٤ ، ٤ : ٩ ، ١ ، -١)

[٣٣] عدد طرق توزيع ثمانية جوائز بالتساوى على ٤ طلاب تساوى ....

(٣٥ ، ٥٦ ، ٢٥٢٠ ، ٤٠٣٢٠)

[٣٤] اذا كان ω ، $ω^٢$ هى الجذور التكعيبية الغير حقيقة للواحد الصحيح فإن مجموعة حل المعادلة

$س^٣ = ٨$ فى $\overline{ك}$ هى ....

({٢} ، { ٢ ، ٢ω ، ٤ $ω^٢$ } ، { ٢ ، ٢ω ، ٢ $ω^٢$ } ، { ٨ ، ٨ω ، ٨ $ω^٢$ })

[٣٥] $\begin{vmatrix} \frac{١}{جـ} & أ & أب \\ \frac{١}{ب} & جـ & أجـ \\ \frac{١}{أ} & ب & بجـ \end{vmatrix}$ = ... (صفر ، ب جـ ، ١ ، ٢)

[٣٦] المستقيمان $\overleftrightarrow{س سَ}$ ، $\overleftrightarrow{ع عَ}$ يكون مستوى الاحداثيات الذى معادلته ....

(س = ٠ ، ص=٠ ، ع = ٠ ، ص=٢)

(بوكلت ٤)

[٣٧] اذا كان $\frac{ن ق_٥}{ن ق_٤} = ٤$ فإن ن = ... (٥ ، ٩ ، ٢٤ ، ٢٥)

[٣٨] مجموع معاملات حدود مفكوك $(١+ س - ٣س^٢)^{٢٠١٧}$ يساوى ...... (-١، ١ ، ٠ ، ٢٠١٧)

[٣٩] اذا كان أ(٢ ، ١ ، ٠) ، ب(١ ، ١ ، ٠) فإن متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{أ ب}$ هو ......

($\overrightarrow{سَ}$ ، $\overrightarrow{صَ}$ ، $\overrightarrow{عَ}$ ، - $\overrightarrow{سَ}$)

[٤٠] حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاثة احرف متجاورة يمثلها المتجهات $\overrightarrow{أ}$ =(٢ ، ١ ، ٣) ،

$\overleftarrow{ب}$ =(-١ ، ٣ ، ٢) ، $\overleftarrow{جـ}$ =(١ ، ١ ، -٢) يساوى .... (٢٢ ، ٢٤ ، ٢٨ ، ٣٠)

[٤١] اذا كان ع عدد مركب ، فإن مجموع جذور المعادلة (ع – ٢)^{٣} = ١ يساوى ..... (٠ ، ٢ ، ١ ، ٦)

[٤٢] اذا كانت م مصفوفة على النظم ٣×٣ وكان | م | = ٢ فإن | ٣ م | = ...

(٥٤ ، ٣٦ ، ١٨ ، ٦)

[٤٣] طول نصف قطر الكرة س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} - ٤س + ٦ص - ٢ع + ٥ = ٠ يساوى ....

(١ ، ٢ ، ٣ ، $\sqrt{١٩}$)

[٤٤] أوجد نقطة على المستقيم $\frac{س}{٣} = \frac{ص+١}{١} = \frac{ع-٣}{٢}$ بحيث يكون احداثيها السينى ضعف احداثيها الصادى ....[(-٦ ، -٣ ، -١) ، (٤ ، ٢ ، -١) ، (٦ ، ٣ ، -١) ، (٢ ، ١ ، -١)]

[٤٥] اذا كان ω ، $\omega^{٢}$ هى الجذور التكعيبية الغير حقيقة للواحد الصحيح فإن

$$\frac{أ+ب\omega+جـ\omega^{٢}}{جـ+أ\omega+ب\omega^{٢}} + \frac{أ+ب\omega+جـ\omega^{٢}}{ب+جـ\omega+أ\omega^{٢}} = ...$$ (-١ ، صفر ، ١ ، ٢)

[٤٦] طول العمود الساقط من النقطة (٣ ، ١ ، -١) على المستوى س + ع = ٦ يساوى ......

(١ ، ٢ ، $\sqrt{٢}$ ، ٢$\sqrt{٢}$)

[٤٧] اذا كان المستويان ٢س + ص – ع = ٥ ، س - ٣ص + ك ع = ٢ متعامدين

فإن ك = ... (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤)

[٤٨] اذا كانت المصفوفة م = $\begin{pmatrix} ١ & -٢ & -٣ \\ -٢ & ٤ & ٦ \\ ٣ & -٦ & -٩ \end{pmatrix}$ فإن ر(م) = ... (٠ ، ١ ، ٢ ، ٣)

اجابات الاسئلة الموضعية

(١) ٥٠	(٢) -٢ت	(٣) $\frac{٧\pi}{٣٦}$
(٤) ٦	(٥) ت	(٦) ٦
(٧) ١٣	(٨) $\frac{٧}{٢}$	(٩) ٧
(١٠) ١١٢٠	(١١) ±(٣+٢ت)	(١٢) $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$
(١٣) ١	(١٤) ٩	(١٥) ٩٠°
(١٦) ١٣	(١٧) (د)	(١٨) - ω
(١٩) ٢$\omega^{٢}$ +٣ω	(٢٠) ١١	(٢١) ١٣
(٢٢) ٣٠°	(٢٣) ٦٠°	(٢٤) ١٣
(٢٥) ٢١٠	(٢٦) ٣	(٢٧) -٤,٥
(٢٨) ١٠	(٢٩) $^{ن}ق_{٤} + {}^{ن}ق_{٥}$	(٣٠) ٦٠
(٣١) ٤	(٣٢) ٩ : ٤	(٣٣) ٢٥٢٠
(٣٤) {٢ ، ٢ω ، ٢$\omega^{٢}$}	(٣٥) صفر	(٣٦) ص=٠
(٣٧) ٢٤	(٣٨) -١	(٣٩) - $\overline{س}$
(٤٠) ٢٨	(٤١) ٦	(٤٢) ٥٤
(٤٣) ٣	(٤٤) (-٦ ، -٣ ، -١)	(٤٥) -١
(٤٦) ٢$\sqrt{٢}$	(٤٧) ١	(٤٨) ١
(٤٩)	(٥٠)	(٥١)
(٥٢)	(٥٣)	(٥٤)
(٥٥)	(٥٦)	(٥٧)
(٥٨)	(٥٩)	(٦٠)

ثانيا:الاسئلة المقالية

(بوكلت ١)

[١] أوجد قياس الزاوية المحصورة بين المستقيم ل: $\frac{\text{س} - ٣}{\sqrt{٢}} = \frac{\text{ص} - ١}{١} = \frac{-\text{ع} - ٢}{١}$

والمستوى $\sqrt{٢}$ س – ص – ع + ٥ = صفر

هـ١ = ($\sqrt{٢}$ ، ١ ، -١) ، هـ٢ = ($\sqrt{٢}$ ، -١ ، -١) نوجد الزاوية بين المستقيم والعمودى على المستوى

∴ جتا θ = $\frac{|(\sqrt{٢} ، ١ ، -١)\bullet(\sqrt{٢} ، -١ ، -١)|}{\sqrt{٢+١+١}\,\sqrt{٢+١+١}} = \frac{١}{٢}$ ∴ θ = ٦٠°

∴ قياس الزاوية بين المستقيم والمستوى = ٩٠ – ٦٠ = ٣٠°

[٢] اذا كانت المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ١ & -٢ \\ -\text{أ} & ٠ & \text{أ}^٢ - \text{ب} \\ \text{ب}^٢ + \text{أ} & ٠ & \text{ب} \end{pmatrix}$ وكان أ × ب = -٣

وكان مرتبة المصفوفة أ يساوى ٢ أوجد قيمة أ٦ + ب٦

∵ مرتبة المصفوفة أ يساوى ٢ ∴ $\begin{vmatrix} ٥ & ١ & -٢ \\ -\text{أ} & ٠ & \text{أ}^٢ - \text{ب} \\ \text{ب}^٢ + \text{أ} & ٠ & \text{ب} \end{vmatrix}$ = ٠ بفك المحدد عن طريق العمود الثانى

∴ –[(أ٢ - ب)(ب٢ + أ) + أ ب] = ٠ ∴ أ٢ب٢ - ب٣ + أ٣ - أ ب + أ ب = ٠

∴ (-٣)٢ + أ٣ - ب٣ = ٠ ∴ أ٣ - ب٣ = ٩ بتربيع الطرفين ∴ أ٦ + ب٦ - ٢أ٣ب٣ = ٨١

∴ أ٦ + ب٦ = ٨١ + ٢(-٣)٣ = ٨١ - ٥٤ = ٢٧

[٣] بدون فك المحدد أثبت أن $\begin{vmatrix} ١ & ٤ & ١ \\ ٠ & -١ & ٢ \\ ٤ & ١٨ & ٠ \end{vmatrix}$ = صفر

باجراء ص٢ - ٢ص١ ∴ $\begin{vmatrix} ١ & ٤ & ١ \\ -٢ & -٩ & ٠ \\ ٤ & ١٨ & ٠ \end{vmatrix}$ باخذ عامل مشترك من ص٢ ، ص٣

$= -٢ \begin{vmatrix} ١ & ٤ & ١ \\ ٢ & ٩ & ٠ \\ ٢ & ٩ & ٠ \end{vmatrix} = ٠$ لان ص٢ = ص٣

[٤] أوجد حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاث احرف متجاورة ممثله بالمتجهات

$-١٢\overleftarrow{س} - ٣\overleftarrow{ع}$ ، $٣\overleftarrow{ص} - \overleftarrow{ع}$ ، $٢\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص} - ١٥\overleftarrow{ع}$

حجم متوازى السطوح = | $\begin{vmatrix} -٣ & ٠ & -١٢ \\ -١ & ٣ & ٠ \\ -١٥ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$ | = |−١٢(−٤٥+١) −٣(٠−٦)| = ٥٤٦

[٥] كرة تمس المستويات س ع ، س ص ، ص ع فى النقط ٢ ، ب ، جـ على الترتيب ، ٢ء قطر فيها حيث ء(٣ ، ٦ ، ٣) أوجد معادلة الكرة

∵ الكرة تمس المستويات س ع ، س ص ، ص ع ∴ نق = ٣ ، مركزها =(٣ ، ٣ ، ٣)

∴ معادلة الكرة $(س-٣)^٢ + (ص-٣)^٢ + (ع-٣)^٢ = ٩$

[٦] أوجد جميع قيم ن ، ر التى تجعل $^{ن+١}ل_{ر+١} = ١٢٠$

ر + ١ = ١ ∴ ر = ٠ ، ن = ١١٩ أ، $^{ن+١}ل_{ر+١}$ = ٦×٥×٤ ∴ ر=٢ ، ن=٥

أ، $^{ن+١}ل_{ر+١}$ = ٥×٤×٣×٢ ∴ ر=٣ ، ن=٤ أ، $^{ن+١}ل_{ر+١}$ = ٥×٤×٣×٢×١ ∴ ر=٤ ، ن=٤

∴ ر ∈ {٠ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ن ∈ {١١٩ ، ٥ ، ٤}

[٧] اذا كان سعة (ع + ت) = $\frac{\pi}{٤}$ ، سعة (ع − ٣) = $\frac{٣\pi}{٤}$

أوجد ع على الصورة الجبرية حيث ع عدد مركب

نفرض ع= س + ت ص ∴ ع + ت = س + (ص+١)ت ∴ سعته $\frac{ص+١}{س}$ =ظا٤٥

∴ س = ص + ١ ⇐ (١) ، ع - ٣ = (س - ٣) + ص ت ∴ سعته $\frac{ص}{س-٣}$ =ظا١٣٥

∴ – س + ٣ =ص ⇐ (٢) بحل المعادلتين ∴ س=٢ ، ص=١

∴ العدد المركب ع = ٢ + ت

[٨] اذا كانت معاملات الحدود الرابع والخامس والسادس على الترتيب فى مفكوك (٢س + ص)^{ن} تكون متتابعة حسابية أوجد قيمة ن

∵ معاملات الحدود الرابع والخامس والسادس

∴ ضعف معامل الحد الخامس = مجموع معاملى الحد الرابع والسادس

∴ $٢ع_٥ = ع_٤ + ع_٦$ ÷ $ع_٥$ ∴ $٢ = \frac{ع_٤}{ع_٥} + \frac{ع_٦}{ع_٥}$

∴ $٢ = \frac{٤}{ن-٤+١} \times \frac{٢}{١} + \frac{ن-٥+١}{٥} \times \frac{١}{٢}$ ∴ $٢ = \frac{٨}{ن-٣} + \frac{ن-٤}{١٠}$ × ١٠(ن-٣)

∴ ٢٠(ن-٣) = ٨٠ + (ن-٤)(ن-٣) ∴ ٢٠ن - ٦٠ = ٨٠ + ن^{٢} - ٧ن +١٢

∴ ن^{٢} - ٢٧ ن +١٥٢=٠ ∴ ن = ١٩ أ، ٨

(بوكلت٢)

[٩] إذا كان $ع_١ = \frac{٢ت}{١+ت}$ ، $ع_٢ = ٤(جتا ١٥° + ت جا ١٥°)$ أوجد $\frac{ع_٢}{(ع_١)^٢}$ على الصورة الاسية

$ع_١ = \frac{٢ت}{(١+ت)} \times \frac{(١-ت)}{(١-ت)} = \frac{٢ت+٢}{٢}$ = ١ + ت = $\sqrt{٢}$ هـ$^{\frac{\pi}{٤}ت}$

، $ع_٢ = ٤(جتا\frac{٥\pi}{٦} + ت جا\frac{٥\pi}{٦}) = ٤$هـ$^{\frac{٥\pi}{٦}ت}$ ∴ $\frac{ع_٢}{(ع_١)^٢} = \frac{٤هـ^{\frac{٥\pi}{٦}ت}}{٢هـ^{\frac{\pi}{٢}ت}}$ = ٢ هـ$^{\frac{\pi}{٣}ت}$

[١٠] أوجد معامل أكبر حد فى مفكوك $(س + \frac{١}{٢س})^٦$ ثم أثبت أن الحد الخالى من س هو الحد الاوسط

لايجاد اكبر معامل نحل المتباينة : معامل $\frac{ع_{ر+1}}{ع_{ر}} \ge 1$ ∴ $\frac{٦-ر+١}{ر}\times\frac{١}{٢}\ge ١$ ∴ ٧ − ر ≥ ٢ر

٧ ≥ ٣ر ∴ $\frac{٧}{٣} \ge$ ر ، ∴ ر = ٢

∵ عدد حدود المفكوك = ٧ عدد فردى ∴ يوجد حد واحد له أكبر معامل هو $ع_{٣}$

∵ $ع_{ر+١} = {}^{٦}ق_{ر}\, س^{٦-ر} \left(\frac{١}{٢س}\right)^{ر} = {}^{٦}ق_{ر} \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر} س^{٦-٢ر}$ بوضع ٦ - ٢ر = ٠ ∴ ر = ٣

∴ الحد الخالى من س هو $ع_{٤}$ هو الحد الاوسط

[١١] أوجد معادلة الكرة التى $\overline{أب}$ قطر فيها حيث أ(-١ ، ٤ ، ٢) ، ب(٣ ، -٢ ، ٦) ثم أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$

مركز الكرة =(١ ، ١ ، ٤) ، نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{٤^{٢}+٦^{٢}+٤^{٢}} = \sqrt{١٧}$

∴ معادلة الكرة (س - ١)^{٢} + (ص - ١)^{٢} + (ع - ٤)^{٢} = ١٧

متجه اتجاه $\overleftrightarrow{أب}$ = (٤ ، -٦ ، ٤) ∴ **الصور المختلفة لمعادلة المستقيم** $\overleftrightarrow{أب}$:

الصورة المتجهة : $\overrightarrow{ر}$ =(-١ ، ٤ ، ٢) + ك (٤ ، -٦ ، ٤)

المعادلات البارامترية : س = -١ + ٤ك ، ص = ٤ - ٦ك ، ع = ٢ + ٤ك

المعادلة الاحداثية : $\frac{س+١}{٤} = \frac{ص-٤}{-٦} = \frac{ع-٢}{٤}$

[١٢] أثبت أن المستويين ٢س + ص + ٢ع = ٨ ، ٤س + ٢ص + ٤ع = ١٠ متوازيان

و أوجد البعد بينهما

∵ $\overrightarrow{ن_{١}}$ =(٢ ، ١ ، ٢) ، $\overrightarrow{ن_{٢}}$ =(٤ ، ٢ ، ٤) ∴ $\frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢} = \frac{٢}{٤}$ ∴ **المستويان متوازيان**

ولايجاد البعد بينهما : **هو طول العمود الساقط من نقطة على احداهما على الآخر**

بفرض س=٠ ، ص=٠ والتعويض فى معادلة المستوى الاول ∴ ع = ٤

∴ النقطة (٠ ، ٠ ، ٤) تقع على المستوى الاول

∴ **البعد بينهما** = $\frac{|٤\times٠+٢\times٠+٤\times٤-١٠|}{\sqrt{١٦+٤+١٦}}=\frac{٥}{٣}$ وحدة طول

[١٣] إذا كان مجموع معاملى $ع_٣$ ، $ع_٤$ فى مفكوك $(١+س)^{ن}$ يساوى $ن^٢+٦ن+٥$

أوجد قيمة ن

${}^{ن}ق_٢+{}^{ن}ق_٣=ن^٢+٦ن+٥$ ∴ ${}^{ن+١}ق_٣=ن^٢+٦ن+٥$

∴ $\frac{(ن+١)ن(ن-١)}{|\underline{٣}}=ن^٢+٦ن+٥$ $\times٦$ ∴ $ن(ن-١)(ن+١)=٦ن^٢+٣٦ن+٣٠$

∴ $ن^٣-ن=٦ن^٢+٣٦ن+٣٠$ ∴ $ن^٣-٦ن^٢-٣٧ن-٣٠=٠$

بالحاسبة ∴ ن = ١٠

[١٤] بدون فك المحدد أثبت أن $\begin{vmatrix}١&١&١\\١&١&١+س\\١&١+س&١\end{vmatrix}=س^٢$

باجراء $ص_٢-ص_١$ ، $ص_٣-ص_١$ ∴ $\begin{vmatrix}١&١&١\\٠&٠&س\\٠&س&٠\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}١&١&١\\٠&س&٠\\٠&٠&س\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}١&١&١\\٠&س&٠\\س&٠&٠\end{vmatrix}=س^٢$

[١٥] أوجد الصورة المثلثية لقيم المقدار $(\sqrt{٣}+ت)^{\frac{٢}{٣}}$

بفرض $ع=\sqrt{٣}+ت$ ∴ $|ع|=٢$ ، $ظا\,\theta=\frac{١}{\sqrt{٣}}$ فى الربع الاول ∴ $\theta=٣٠^\circ=\frac{\pi}{٦}$

∴ $ع=٢(جتا\frac{\pi}{٦}+ت\,جا\frac{\pi}{٦})$

∴ $ع^{\frac{٢}{٣}}=(جتا\frac{\pi}{٣}+ت\,جا\frac{\pi}{٣})^{\frac{١}{٣}}=(جتا\frac{\frac{\pi}{٣}+٢ر\pi}{٣}+ت\,جا\frac{\frac{\pi}{٣}+٢ر\pi}{٣})$ حيث ر $\in$ {٠ ، ١ ، ٢}

ع١ = (جتا $\frac{\pi}{٩}$ + ت جا $\frac{\pi}{٩}$) ، ع٢ = (جتا $\frac{٧\pi}{٩}$ + ت جا $\frac{٧\pi}{٩}$) ، ع٣ = (جتا $\frac{١٣\pi}{٩}$ + ت جا $\frac{١٣\pi}{٩}$)

[١٦] أوجد رتبة المصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & -٣ \\ ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & -٥ & ٢ \end{pmatrix}$ **ومن ثم أثبت أن المعادلات ٢س – ص -٣ع =٢ ، س + ٢ص + ع = ١ ، ٣س -٥ص + ٢ع = ١٣ لها حل وحيد وأوجد ذلك الحل باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة**

الحل

∵ $\begin{vmatrix} ٢ & -١ & -٣ \\ ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & -٥ & ٢ \end{vmatrix}$ **= ٢(٤+٥) +(٢-٣) -٣(-٥-٦) = ٥٠ ≠ ٠**

∴ ر(م)=ر(م*) = ٣ =عدد المجاهيل ∴ للمعادلات حل وحيد

م^مل = $\begin{pmatrix} ٩ & ١ & -١١ \\ ١٧ & ١٣ & ٧ \\ ٥ & -٥ & ٥ \end{pmatrix}^{مد}$ = $\begin{pmatrix} ٩ & ١٧ & ٥ \\ ١ & ١٣ & -٥ \\ -١١ & ٧ & ٥ \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{١}{٥٠}\begin{pmatrix} ٩ & ١٧ & ٥ \\ ١ & ١٣ & -٥ \\ -١١ & ٧ & ٥ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \\ ١٣ \end{pmatrix} = \frac{١}{٥٠}\begin{pmatrix} ١٠٠ \\ -٥٠ \\ ٥٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ -١ \\ ١ \end{pmatrix}$

∴ م.ح { (٢ ، -١ ، ١) }

(بوكلت٣)

[١٧] أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الاصل ويقطع المستقيم $\overrightarrow{ر}$ =(٣ ، ١ ، ٤) + ك(٢ ، ١ ، ٣) على التعامد

الحل

نقطة التقاطع تحقق معادلة المستقيم المعطى وهى (س ، ص ، ع) =(٣+٢ك ، ١ + ك ، ٤ + ٣ك)

∴ متجه اتجاه المستقيم العمودى عليه من نقطة الاصل هو (٣+٢ك ، ١ + ك ، ٤ + ٣ك)

ومن شرط التعامد ∴ (٣+٢ك ، ١ + ك ، ٤ + ٣ك)•(٢ ، ١ ، ٣) =٠

∴ ٦+٤ك + ١+ ك + ١٢ + ٩ك=٠ ∴ ك = $-\frac{١٩}{١٤}$

∴ متجه اتجاه المطلوب (($\frac{٢}{٧}$ ، $-\frac{٥}{١٤}$ ، $\frac{-١}{١٤}$)) =(٤ ، -٥ ، -١)

∴ معادلة المستقيم $\overleftarrow{\text{ر}}$ = ك (٤ ، -٥ ، -١)

[١٨] اذا كان ع = هـ $^{ت\theta}$ فأوجد المقياس والسعة للعدد $\frac{١+\text{ع}}{١-\text{ع}}$

ع=جتاθ + ت جاθ وبفرض أن ٢ى =θ ∴ ع = جتا٢ى + ت جا٢ى

$$\therefore \frac{١+\text{ع}}{١-\text{ع}} = \frac{١+\text{جتا٢ي}+\text{ت جا٢ي}}{١-\text{جتا٢ي}+\text{ت جا٢ي}} = \frac{١+(\text{٢جتا}^{٢}\text{ي}-١)+\text{٢ت جاي جتاي}}{١-(١-\text{٢جا}^{٢}\text{ي})+\text{٢ت جاي جتاي}}$$

$$= \frac{\text{٢جتا}^{٢}\text{ي}+\text{٢ت جاي جتاي}}{\text{٢جا}^{٢}\text{ي}+\text{٢ت جاي جتاي}} = \frac{\text{٢جتاي}(\text{جتاي}+\text{ت جاي})}{\text{٢جاي}(\text{جاي}+\text{ت جتاي})}$$

$$= \text{ظتاي} \times \frac{(\text{جتاي}+\text{ت جاي})}{(\text{جتا}(\frac{\pi}{٢}-\text{ي})+\text{ت جا}(\frac{\pi}{٢}-\text{ي}))}$$ =ظتاى×(جتا(٢ى - $\frac{\pi}{٢}$) + ت جا(٢ى - $\frac{\pi}{٢}$))

∴ مقياس العدد ظتا $\frac{\theta}{٢}$ ، سعته الاساسية = θ - $\frac{\pi}{٢}$

[١٩] ابحث امكانية حل المعادلات الآتية وأوجد الحل إن وجد

$$\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٢ \\ ١ & -١ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \\ ٣ \end{pmatrix}$$

∵ $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٢ \\ ١ & -١ & ٠ \end{vmatrix}$ = (٠+٢) –(٠-٢) +(-٢-٣) = -١ ≠ ٠ ∴ يمكن حل انظمة المعادلات لان ر(م)=٣

$$\begin{pmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\\ \text{ع}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}١ & ١ & ١\\ ٢ & ٣ & ٢\\ ١ & -١ & ٠\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}١\\ ٠\\ ٣\end{pmatrix}$$

نوجد المعكوس الضربى للمصفوفة $\text{أ} = \begin{pmatrix}١ & ١ & ١\\ ٢ & ٣ & ٢\\ ١ & -١ & ٠\end{pmatrix}$

$$\text{أ}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix}٢ & ٢ & -٥\\ -١ & -١ & ٢\\ -١ & ٠ & ١\end{pmatrix}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix}٢ & -١ & -١\\ ٢ & -١ & ٠\\ -٥ & ٢ & ١\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\\ \text{ع}\end{pmatrix} = \frac{١}{-١}\begin{pmatrix}٢ & -١ & -١\\ ٢ & -١ & ٠\\ -٥ & ٢ & ١\end{pmatrix}\begin{pmatrix}١\\ ٠\\ ٣\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}١\\ -٢\\ ٢\end{pmatrix}$$

$\therefore$ م.ح { (١ ، -٢ ، ٢) }

يمكن التحقق بالحاسبة mode+eqn+٢

[٢٠] بدون فك المحدد أثبت أن:

$$\begin{vmatrix}\text{أ} & \text{ب} & \text{جـ}\\ \text{ب} & \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}\\ \text{ب} & \text{أ} & \text{جـ}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\text{أ} & \text{ب} & ٠\\ \text{ب} & \text{أ}+\text{ب} & \text{ب}\\ \text{جـ} & \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} & \text{أ}+\text{ب}\end{vmatrix} = \text{صفر}$$

بتدوير المحدد الاول والجمع مع الثانى

$$\begin{vmatrix}\text{أ} & \text{ب} & \text{ب}\\ \text{ب} & \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}\\ \text{جـ} & \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} & \text{جـ}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\text{أ} & \text{ب} & ٠\\ \text{ب} & \text{أ}+\text{ب} & \text{ب}\\ \text{جـ} & \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} & \text{أ}+\text{ب}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\text{أ} & \text{ب} & \text{ب}\\ \text{ب} & \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}+\text{ب}\\ \text{جـ} & \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} & \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}\end{vmatrix} = \text{صفر}$$

لأن $\text{ع}_٢ = \text{ع}_٣$

[٢١] فى مفكوك $\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}^٢}\right)^٩$ ❶ **أوجد رتبة وقيمة الحد الخالى من س**

❷ **أوجد قيمة س التى تجعل مجموع الحدين الاوسطين فى المفكوك يساوى صفر**

① $ع_{ر+1} = {}^{9}ق_{ر} (س)^{9-ر} \left(\frac{1}{س^{2}}\right)^{ر}$ ∴ بوضع ٩ – ر - ٢ر = ٠ ∴ ر = ٣ ∴ $ع_{4}$ هو الحد الخالى

∴ $ع_{4} = {}^{9}ق_{3} = 84$

② عدد الحدود = ١٠ ∴ يوجد حدان اوسطان هما $ع_{5}$ ، $ع_{6}$ ∴ $ع_{5} + ع_{6} = 0 \div ع_{5}$

∴ $1 + \frac{ع_{6}}{ع_{5}} = 0$ ∴ $1 + \frac{9-5+1}{5} \times \frac{1}{س^{3}} = 0$ ∴ $س^{3} = -1$ ∴ س = -١

[٢٢] اذا تقاطع المستويان ٣س – ٦ص + ٦ع – ٥ = ٠ ، س + ع – ٣ = ٠

① أوجد معادلة خط تقاطع المستويين ② أوجد قياس الزاوية بين المستويين

① بوضع ص = ك ∴ ٣س + ٦ع = ٦ك + ٥ ⇐ (١) ، س + ع = ٣ ⇐ (٢) × -٣ والجمع

∴ ٣ع = ٦ك - ٤ ∴ ع = $\frac{6ك-4}{3}$ بالتعويض فى (٢) ∴ س = ٣ - $\frac{6ك-4}{3}$ ⇐ ٣س = ٩ - ٦ك + ٤

∴ $\frac{3س-13}{-6} = ك = \frac{3ع+4}{6}$ ∴ معادلة خط تقاطع هى $\frac{3س-13}{-6} = ص = \frac{3ع+4}{6}$

② $هـ_{1} = (3 ، -6 ، 6)$ ، $هـ_{2} = (1 ، 0 ، 1)$

∴ $جتا\theta = \frac{|(3 ، -6 ، 6) \bullet (1 ، 0 ، 1)|}{\sqrt{9+36+36}\sqrt{1+0+1}}$ ∴ $جتا\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ∴ $\theta = 45°$

[٢٣] إذا قطع مستوى محاور الاحداثيات فى النقط ﻢ ، ب ، جـ وكانت النقطة

(م ، ں ، و) هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث ﻢ ب جـ أثبت أن معادلة المستوى هى:

$$\frac{س}{م} + \frac{ص}{ں} + \frac{ع}{و} = 3$$

بفرض نقاط التقاطع هى ﻢ(ﻢ ، ٠ ، ٠) ، ب(٠ ، ب ، ٠) ، جـ(٠ ، ٠ ، جـ)

∵ (م ، ں ، و) = $\left(\frac{ﻢ+0+0}{3} ، \frac{0+ب+0}{3} ، \frac{0+0+جـ}{3}\right)$

∴ ﻢ = ٣م ، ب = ٣ں ، جـ = ٣و ⇐ (١)

∵ معادلة المستوى الذى يقطع من محاور الاحداثيات ﻢ ، ب ، جـ

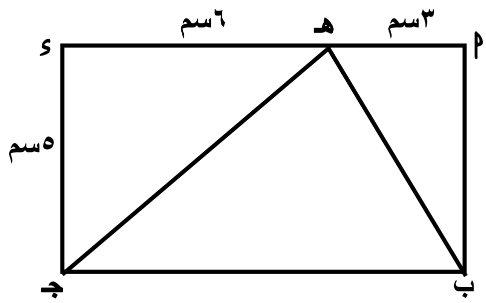
هى $\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} + \frac{\text{ع}}{\text{جـ}} = ١$ ⇐ (٢) من (١) بالتعويض فى (٢)

$\therefore \frac{\text{س}}{٣\text{م}} + \frac{\text{ص}}{٣\text{ن}} + \frac{\text{ع}}{٣\text{و}} = ١ \times ٣ \quad \therefore \frac{\text{س}}{\text{م}} + \frac{\text{ص}}{\text{ن}} + \frac{\text{ع}}{\text{و}} = ٣$

[٢٤] فى الشكل المقابل: م ب جـ ء مستطيل ،

هـ ∈ $\overline{\text{م ء}}$ فإن $\overleftarrow{\text{هـ ب}} \bullet \overleftarrow{\text{هـ جـ}}$ = ...

(٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠)



بفرض نظام احداثى مركزه جـ ∴ جـ(٠ ، ٠) ، هـ (٦ ، ٥) ، ب(٩ ، ٠)

∴ $\overleftarrow{\text{هـ ب}} \bullet \overleftarrow{\text{هـ جـ}}$ = (٣ ، -٥) • (-٦ ، -٥) = -١٨+٢٥ =٧

حل آخر

ب هـ = $\sqrt{٣٤}$ ، هـ جـ = $\sqrt{٦١}$

فى Δ ب هـ جـ من قاعدة جيب التمام ∴ جتا(∠ب هـ جـ) = $\frac{٣٤ + ٦١ - ٩^{٢}}{٢\sqrt{٣٤}\sqrt{٦١}} = \frac{٧}{\sqrt{٣٤}\sqrt{٦١}}$

∴ $\overleftarrow{\text{هـ ب}} \bullet \overleftarrow{\text{هـ جـ}}$ = $\sqrt{٣٤}\sqrt{٦١} \times \frac{٧}{\sqrt{٣٤}\sqrt{٦١}}$ **=٧**

(بوكلت ٤)

[٢٥] اثبت بدون فك المحدد أن $\begin{vmatrix} ٠ & \text{ل} - \text{م} & \text{ل} - \text{ن} \\ \text{م} - \text{ل} & ٠ & \text{م} - \text{ن} \\ \text{ن} - \text{ل} & \text{ن} - \text{م} & ٠ \end{vmatrix} = ٠$

بفرض Δ = $\begin{vmatrix} ٠ & \text{ل} - \text{م} & \text{ل} - \text{ن} \\ \text{م} - \text{ل} & ٠ & \text{م} - \text{ن} \\ \text{ن} - \text{ل} & \text{ن} - \text{م} & ٠ \end{vmatrix}$ **= -١×-١×-١** $\begin{vmatrix} ٠ & \text{م} - \text{ل} & \text{ن} - \text{ل} \\ \text{ل} - \text{م} & ٠ & \text{ن} - \text{م} \\ \text{ل} - \text{ن} & \text{م} - \text{ن} & ٠ \end{vmatrix}$

بتدوير المحدد ∴ $\Delta = -\begin{vmatrix} ٠ & ل-م & ل-ن \\ م-ل & ٠ & م-ن \\ ن-ل & ن-م & ٠ \end{vmatrix}$ ∴ $\Delta = -\Delta$ ∴ $٢\Delta = ٠$ ∴ $\Delta = ٠$ #

[٢٦] أوجد (ان امكن) حل النظام الاتى باستخدام طريقة المعكوس الضربى للمصفوفة

س + ٣ص + ٢ ع = ٠ ، س + ع = -١ ، س + ٢ص = ٣

$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ & ١ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{vmatrix} = ٥$ ، ∴ ر(أ) = ر(أ*) = ٣ ∴ للنظام حل وحيد

$أ^{مل} = \begin{pmatrix} -٢ & ٤ & ٣ \\ ١ & -٢ & ١ \\ ٢ & ١ & -٣ \end{pmatrix}$ ∴ $أ^{-١} = \frac{١}{٥}\begin{pmatrix} -٢ & ٤ & ٣ \\ ١ & -٢ & ١ \\ ٢ & ١ & -٣ \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{١}{٥}\begin{pmatrix} -٢ & ٤ & ٣ \\ ١ & -٢ & ١ \\ ٢ & ١ & -٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٠ \\ -١ \\ ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ١ \\ -٢ \end{pmatrix}$ ∴ م.ح = { (١ ، ١ ، -٢) }

[٢٧] أوجد مسقط النقطة (١ ، ٢ ، ٣) على المستوى س + ٢ص + ٤ ع = ٥٩

نوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة المعطاة عمودياً على المستوى فيكون متجه اتجاه هو العمودى على المستوى و هى $\vec{ر}$ = (١ ، ٢ ، ٣) + ك (١ ، ٢ ، ٤) ∴ نقطة التقاطع تحقق المعادلة

∴ $\vec{ر}$ =(١+ ك ، ٢+ ٢ك ، ٣ + ٤ك) بالتعويض فى معادلة المستوى

∴ (١+ك) + ٢(٢+٢ك) + ٤(٣+٤ك) =٥٩ ∴ ك = ٢ ∴ المسقط =(٣ ، ٦ ، ١١)

[٢٨] بكم طريقة يمكن وضع ٨ كرات متطابقة فى ٣ صناديق مختلفة بحيث لايوجد صندوق فارغ

وضع ١ ، ١ ، ٦ ومع التبديل عدد الطرق =٣

وضع ١ ، ٢ ، ٥ ومع التبديل عدد الطرق = ٦

وضع ٢ ، ٢ ، ٤ ومع التبديل عدد الطرق = ٣

وضع ٣ ، ١ ، ٤ ومع التبديل عدد الطرق = ٦

وضع ٣ ، ٢ ، ٣ ومع التبديل عدد الطرق =٣

∴ اجمالى عدد الطرق = ٣ + ٦ + ٣ +٦ +٣ =٢١

حل آخر:

نضع فى كل صندوق كرة لكى يتحقق شرط عدم وجود صندوق فارغ

∴ يتبقى ٥ كرات توزع على الثلاث صناديق ∴ نختار من الصناديق الثلاثة بعضها او كلها

∴ احلال وبدون ترتيب ∴ ر=٥ ، ن =٣ ∴ عدد الطرق = $^{ن+ر-1}ق_{ر}$ = $^{7}ق_{5}$ =٢١

[٢٩] أوجد معادلة المستوى المار بالنقطتين (١ ، -١ ، ١) ، (-١ ، ١ ، ١) وعمودياً على المستوى س + ٢ص + ٢ع = ٥

بفرض $\overleftarrow{هـ}$ متجه اتجاه للمستقيم المار بالنقطتين ∴ $\overleftarrow{هـ}$ =(٢ ، -٢ ، ٠)

، $\overleftarrow{ن}$ متجه اتجاه العمودى على المستوى المعطى ∴ $\overleftarrow{ن}$ =(١ ، ٢ ، ٢)

نلاحظ أن $\overleftarrow{هـ}$ ، $\overleftarrow{ن}$ غير متوازيان ∴ هما متقاطعان أو متخالفان

∴ متجه اتجاه العمودى على المستوى المطلوب = $\overleftarrow{هـ} \times \overleftarrow{ن} = \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ٢ & -٢ & ٠ \\ ١ & ٢ & ٢ \end{vmatrix}$

= ٦ $\overleftarrow{س}$ -٤ $\overleftarrow{ص}$ + ٦ $\overleftarrow{ع}$

∴ معادلة المستوى المطلوب ٦س -٤ص +٦ع =(٦ ، -٤ ، ٦)•(١ ، -١ ، ١)

٦س -٤ص +٦ع =١٦

[٣٠] باعتبار المستويين س + ٢ص – ٢ع = ١ ، ٢س + ص -٣ع =٥

❶ أوجد معادلة خط تقاطع المستويين ❷ أوجد قياس الزاوية بين المستويين

حاول بنفسك تم حل مثال سابق [خط التقاطع $\frac{٣ص - ٩}{٤} = ٣ص + ٣ = ع$ ، θ = ١ َ ٢٧ °]

[٢٩] اذا كان ع عدد مركب ❶ |ع| = ع + ٣ - ٢ت فأوجد ع ❷ |ع-٢| = ع +٣ت فأوجد ع

① بفرض ع = س + ص ت ∴ | ع | = $\sqrt{س^{٢}+ص^{٢}}$ ∴ $\sqrt{س^{٢}+ص^{٢}}$ = س +ص ت +٣-٢ت

∴ $\sqrt{س^{٢}+ص^{٢}}$ = (س +٣) + (ص - ٢) ت ∴ ص - ٢= ٠ ∴ ص=٢ ،

∴ $\sqrt{س^{٢}+ص^{٢}}$ = س +٣ بتربيع الطرفين والتعويض عن ص ∴ س = - $\frac{٥}{٦}$ ∴ ع = - $\frac{٥}{٦}$ +٢ت

② بفرض ع = س +ص ت ∴ |ع - ٢| = $\sqrt{(س-٢)^{٢}+ص^{٢}}$ = س + (ص+٣) ت

∴ ص=-٣ ، $\sqrt{(س-٢)^{٢}+ص^{٢}}$ = س بالتربيع ∴ س = $\frac{١٣}{٤}$ ∴ ع = $\frac{١٣}{٤}$ -٣ت

دليل التقويم

[١] إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متجهين وحدة قياس الزاوية بينهما θ فإن $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}$ يكون متجه وحدة إذا كان θ = ... ($\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}\pi$ ، π)

∵ $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}$ متجه وحده ∴ $\|\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}\| = ١$ و بتربيع الطرفين ∴ $(\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}) \bullet (\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}) = ١$

∴ $\|\overleftarrow{\text{أ}}\|^٢ + \|\overleftarrow{\text{ب}}\|^٢ + ٢\,\overleftarrow{\text{أ}} \bullet \overleftarrow{\text{ب}} = ١$ ∴ ١ + ١ + ٢×١×١× جتا θ = ١

∴ جتا $\theta = -\frac{١}{٢}$ ∴ $\theta = \frac{٢}{٣}\pi$

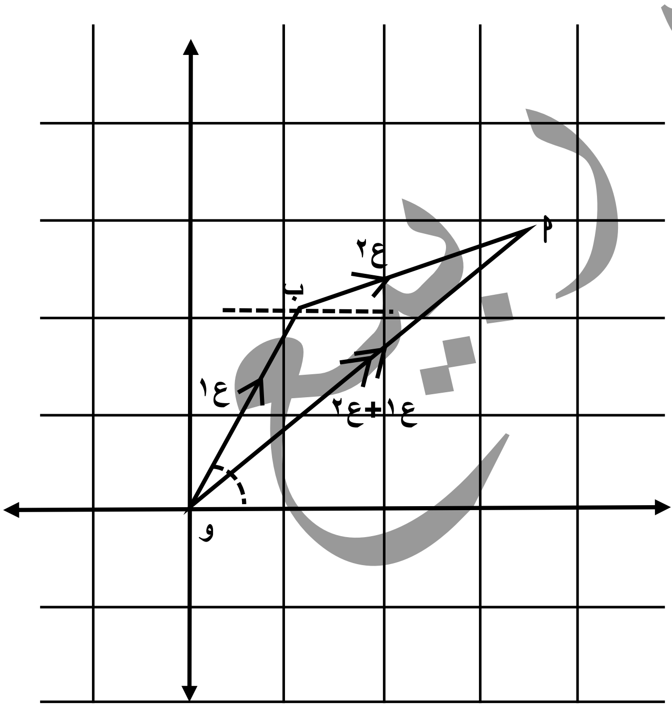
[٢] إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} \perp \overleftarrow{\text{ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ}} \perp \overleftarrow{\text{جـ}}$ وكان $\overleftarrow{\text{ب}}$ =(٢ ، ٣ ، ٢) ، $\overleftarrow{\text{جـ}}$ =(١ ، ٢ ، ١)

وكان معيار $\|\overleftarrow{\text{أ}}\| = ٤\sqrt{٢}$ أوجد $\overleftarrow{\text{أ}}$

∵ $\overleftarrow{\text{ب}}$ لا يوازى $\overleftarrow{\text{جـ}}$ لان $\frac{٢}{١} \neq \frac{٣}{٢}$ ، ∵ $\overleftarrow{\text{أ}} \perp \overleftarrow{\text{ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ}} \perp \overleftarrow{\text{جـ}}$ ∴ $\overleftarrow{\text{أ}}$ عمودى على مستويهما

[٣] إذا كان $ع_١$ = ٢(جتا٧٥ + ت جا٧٥) ، $ع_٢$ =٢(جتا١٥ + ت جا١٥)

باستخدام شكل ارجاند أوجد $ع_١+ع_٢$ على الصورة المثلثية ، $ع_١ - ع_٢$ على الصورة الاسية



أولا: $ع_١ + ع_٢$

نستخدم قاعدة المثلث لجمع وطرح المتجهات

$ل_١ = ل_٢ = ٢$ ∴ Δ أ ب و متساوى الساقين

، ق(∠أ ب و) = ١٥ + ١٠٥ = ١٢٠°

∴ ق(∠أ و ب) = ٣٠° ومن قاعدة جيب التمام

∴ أ و = $٢\sqrt{٣}$ = مقياس $ع_١ + ع_٢$

، زاوية $ع_١ + ع_٢$ = ٧٥ - ٣٠ = ٤٥

∴ $ع_١+ع_٢ = ٢\sqrt{٣}$ (جتا٤٥ + ت جا ٤٥)

ثانيا: $ع_1 - ع_2$

$-ع_2 = 2$(جتا(-15) + ت جا(-15))

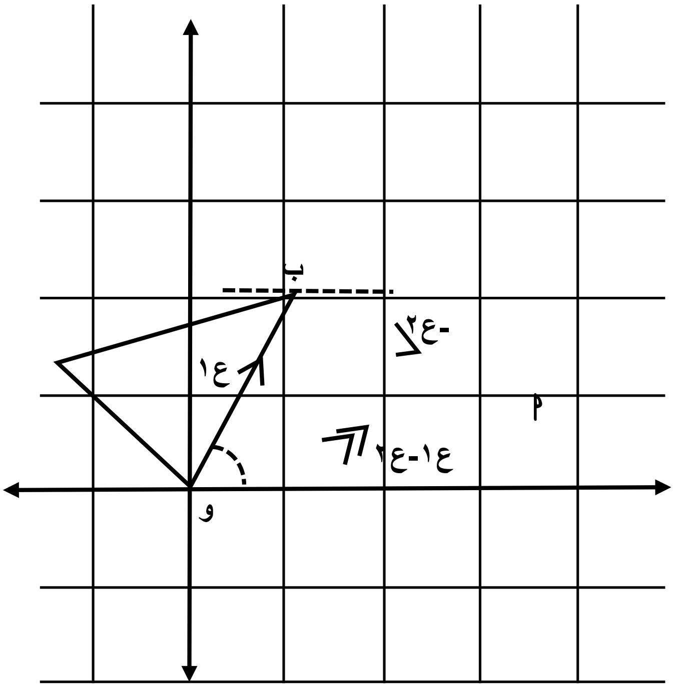
، ق(∠ ا ب و) = 105 - 15 = 90°

$ل_1 = ل_2 = 2$ ∴ Δ ا ب و متساوى الساقين

، زاوية $ع_1 - ع_2 = 75 - 45 = 30$

∴ ا و = $2\sqrt{2}$ = مقياس $ع_1 - ع_2$

∴ $ع_1 - ع_2 = 2\sqrt{2}$ (جتا 30 + ت جا 30)



[4] أثبت أن إحدى قيم المقدار $\sqrt{ت} - \sqrt{-ت} = \sqrt{2}$

بفرض الايمن = ص = $\sqrt{ت} - \sqrt{-1}\sqrt{ت} = \sqrt{ت} - ت\sqrt{ت} = \sqrt{ت}(1-ت)$ بتربيع الطرفين

∴ $ص^2 = ت(1 - 2ت + ت^2)$ ∴ $ص^2 = -2ت^2 = 2$ ∴ ص = $\pm\sqrt{2}$

حل آخر:

الايمن = $\sqrt{ت} - ت\sqrt{ت} = \sqrt{ت}(1-ت) = \sqrt{\frac{1}{2}\times 2ت}(1-ت) = (1-ت)\sqrt{\frac{1}{2}\times(1+ت)^2}$

$= \pm(1-ت)(1+ت)\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}(1-ت^2) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}(2) = \pm\sqrt{2}$

[5] إذا كان $ع_1$ = جتا75 + ت جا75 ، $ع_2$ = جتا15 + ت جا 15

أوجد بالصورة المثلثية العدد $ع_1 + ع_2$

[5] إذا كان $ع_1$ = جتا75 + ت جا75 ، $ع_2$ = جتا15 + ت جا 15

أوجد بالصورة المثلثية العدد $ع_1 + ع_2$

$ع_1 + ع_2$ = (جتا75 + جتا15) + ت(جا75 + جا15)

$\because$ جتاس + جتاص = ٢ جتا $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}$ جتا $\frac{\text{س} - \text{ص}}{٢}$ ،

جاس + جاص = ٢جا $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}$ جتا $\frac{\text{س} - \text{ص}}{٢}$

جتا٧٥ + جتا ١٥ = ٢جتا٤٥ جتا٣٠ = $\frac{\sqrt{٦}}{٢}$ ، جا٧٥ + جا ١٥ = ٢جا٤٥ جتا٣٠ = $\frac{\sqrt{٦}}{٢}$

$\therefore$ ع١+ع٢ = $\frac{\sqrt{٦}}{٢} + \frac{\sqrt{٦}}{٢}$ت $\therefore$ | ع١+ع٢ | = $\sqrt{٣}$ ، $\theta = \frac{\pi}{٤}$

$\therefore$ ع١+ع٢ = $\sqrt{٣}\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٤} + \text{ت جا}\frac{\pi}{٤}\right)$

حل آخر:

ع١+ع٢ = (جتا٧٥ + جتا١٥) + ت(جا٧٥ + جا١٥)

$\therefore$ ظا السعة الاساسية θ = $\frac{\text{جا٧٥} + \text{جا١٥}}{\text{جتا٧٥} + \text{جتا١٥}} = \frac{\text{جتا١٥} + \text{جتا٧٥}}{\text{جتا٧٥} + \text{جتا١٥}} = ١$ $\therefore \theta = \frac{\pi}{٤}$

، | ع١+ع٢ | = $\sqrt{(\text{جتا٧٥}+\text{جتا١٥})^٢ + (\text{جا٧٥}+\text{جا١٥})^٢}$

$= \sqrt{(\text{جتا}^٢\text{٧٥} + \text{٢جتا٧٥جتا١٥} + \text{جتا}^٢\text{١٥}) + (\text{جا}^٢\text{٧٥} + \text{٢جا٧٥جا١٥} + \text{جا}^٢\text{١٥})}$

$= \sqrt{٢ + \text{٢جتا٧٥جتا١٥} + \text{٢جا٧٥جا١٥}} = \sqrt{٢ + \text{٢جتا٧٥جتا٧٥} + \text{٢جا٧٥جتا٧٥}}$

$= \sqrt{٢ + \text{٤جتا٧٥جا٧٥}} = \sqrt{٢ + \text{٢جا١٥٠}} = \sqrt{٣}$ $\therefore$ ع١+ع٢ = $\sqrt{٣}\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٤} + \text{ت جا}\frac{\pi}{٤}\right)$

[٦] إذا كان س + ص ت = $\frac{\text{أ} + \text{ب ت}}{\text{أ} - \text{ب ت}}$ فإن $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢$ = ...

باخذ المقياس للطرفين $\therefore$ | س + ص ت | = $\left|\frac{\text{أ} + \text{ب ت}}{\text{أ} - \text{ب ت}}\right| = \frac{|\text{أ} + \text{ب ت}|}{|\text{أ} - \text{ب ت}|}$

$\therefore \sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢} = \frac{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}}$ $\therefore \sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢} = ١$ $\therefore \text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ١$

حل آخر:

∵ س + ص ت = $\frac{\text{أ} + \text{ب ت}}{\text{أ} - \text{ب ت}}$ ⇐ (١) باخذ المرافق للطرفين ∴ س - ص ت = $\frac{\text{أ} - \text{ب ت}}{\text{أ} + \text{ب ت}}$ ⇐ (٢)

بضرب طرفى المعادلتين ∴ س^{٢} + ص^{٢} = $\frac{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}$ = ١

[٧] إذا كان أ ، ب ، جـ ∈ ح ، أ + ب + جـ = ٨ ، أ ب + ب جـ + أ جـ = ١٢

باستخدام خواص المحددات أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{جـ} - \text{أ} & \text{ب} - \text{جـ} & \text{أ} - \text{ب} \\ ٢ & ٢ & ٢ \end{vmatrix}$

= $\begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ ٢ & ٢ & ٢ \end{vmatrix}$ - $\begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{جـ} & \text{ب} \\ ٢ & ٢ & ٢ \end{vmatrix}$ = صفر - $\begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{جـ} & \text{ب} \\ ٢ & ٢ & ٢ \end{vmatrix}$ باجراء ع١-ع٣ ، ع٢-ع٣

= -٢ $\begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} - \text{جـ} & \text{أ} - \text{جـ} \\ \text{أ} & \text{جـ} - \text{أ} & \text{ب} - \text{أ} \\ ١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ = -٢ [(أ − جـ)(جـ - أ) −(ب − أ)(ب − جـ)]

= ٢ (أ^{٢} + جـ^{٢} - ٢ أ جـ + ب^{٢} - أ ب − ب جـ + أ جـ)

= ٢(أ^{٢} + جـ^{٢} + ب^{٢} - أ جـ - أ ب − ب جـ) = ٢[أ^{٢} + جـ^{٢} + ب^{٢} −(أ جـ + أ ب + ب جـ)]

= ٢[أ^{٢} + جـ^{٢} + ب^{٢} −١٢] ⇐ (١)

∴ أ + ب + جـ = ٨ بتربيع الطرفين ∴ أ^{٢} + جـ^{٢} + ب^{٢} + ٢ أ ب + ٢ أ جـ + ٢ ب جـ =٦٤

∴ أ^{٢} + جـ^{٢} + ب^{٢} + ٢ × ١٢ =٦٤ ∴ أ^{٢} + جـ^{٢} + ب^{٢} = ٤٠ ⇐ (٢) بالتعويض فى (١)

= ٢(٤٠ -١٢) = ٥٦

[٨] مرافق العدد المركب (ت+ω) هو العدد المركب (-ت+ω ، -ت+ω^{٢}، -ت-ω ، -ت-ω^{٢})

مرافق مجموع عددين يساوى مجموع مرافقيهما ∴ $\overline{\text{ت} + \omega} = \overline{\text{ت}} + \overline{\omega}$ = -ت+ω^{٢}

[٩] إذا كان ت^{١٢} = $\omega^{١٢}$ فإن

(أ) ت = ω **(ب) ت = $\pm\,\omega$**

(جـ) ت ، ω كلاهما أحد جذور المعادلة ع^{١٢} = ١ **(د) ت، ω لا علاقة بينهما**

∵ ت^{١٢} = ١ ، $\omega^{١٢}$ = ١ ∴ كلاهما أحد جذور المعادلة ع^{١٢} = ١

[١٠] إذا كان ك = (٢س+ت)^{١٥} - ١٥(ت-٢ص)(٢س+ت)^{١٤} +

$\frac{١٥\times١٤}{\lfloor ٢}$ (ت - ٢ص)^{٢}(٢س + ت)^{١٣} - .... - (ت-٢ص)^{١٥} أوجد قيمة ك عندما

س = ت$\omega^{٢}$ ، ص = تω ثم أوجد معامل س^{٩}ص^{٦} فى مفكوك ك.

الطرف الايسر عبارة عن مفكوك ذات الحدين

∴ ك = $\left[(٢س+ت)-(ت-٢ص)\right]^{١٥}$ = $(٢س+٢ص)^{١٥}$

= $(٢ت\omega^{٢}+٢ت\omega)^{١٥} = (٢ت)^{١٥}(\omega^{٢}+\omega)^{١٥}$ = $-٢^{١٥}ت^{١٥}(-١)^{١٥}$ = $٢^{١٥}ت^{١٥}$

[١١]

كتاب المدرسة و مصادر اخرى

[١] أثبت أن المستقيم $\frac{س-١}{٢} = \frac{ص+٣}{-١} = \frac{ع}{٣}$ يقطع المستوى ٣س + ٢ص + ع -٨=٠ فى نقطة (أوجدها) ثم أوجد قياس زاوية ميل المستقيم على المستوى

المعادلة البارمترية للمستقيم هى س = ١ +٢ ك ، ص = -٣ – ك ، ع = ٣ك ⇐ (١)

∴ $\overleftarrow{هـ}$ = (٢ ، -١ ، ٣) ، للمستوى $\overleftarrow{ن}$ = (٣ ، ٢ ، ١)

∴ $\overleftarrow{هـ} \bullet \overleftarrow{ن}$ = ٦ - ٢ +٣ = ٧ ≠ ٠ المستقيم لايوازى المستوى لانه لو كان عمودى على المتجه العودى على المستوى فيكون موازيا للمستوى

∴ المستقيم يقطع المستوى فى نقطة من (١) بالتعويض فى معادلة المستوى

∴ ٣(١+٢ك) + ٢(-٣ – ك) + (٣ك) – ٨ = ٠ ∴ -١١ +٧ك=٠ ∴ ك = $\frac{١١}{٧}$

∴ نقطة التقاطع هى ($\frac{٢٩}{٧}$ ، $\frac{-٣٢}{٧}$ ، $\frac{٣٣}{٧}$)

قياس الزاوية بين المستقيم والعمودى على المستوى جتا θ = $\frac{|(٢ ، -١ ، ٣)\bullet(٣ ، ٢ ، ١)|}{\sqrt{٤+١+٩}\sqrt{٩+٤+١}}$

∴ جتا θ = $\frac{١}{٢}$ ∴ θ = ٦٠°

∴ قياس الزاوية بين المستقيم والمستوى = ٩٠ – ٦٠ = ٣٠°

[٢] إذا كان ع= س + ص ت عدد مركب وكان $\left|\frac{ع-٣ت}{ع+٣ت}\right| = ١$ فإن ع فى مستوى أرجاند

يقع .... (على محور السينات ، على محور الصادات ، فى الربع الأول ، فى الربع الثالث)

∵ $\left|\frac{ع_١}{ع_٢}\right| = \frac{|ع_١|}{|ع_٢|}$ ، ∵ $\left|\frac{ع-٣ت}{ع+٣ت}\right| = ١$ ∴ $\left|\frac{س+(ص-٣)ت}{س+(ص+٣)ت}\right| = \frac{\sqrt{س^٢+(ص-٣)^٢}}{\sqrt{س^٢+(ص+٣)^٢}} = ١$

∴ $\sqrt{س^٢+(ص-٣)^٢}$ = $\sqrt{س^٢+(ص+٣)^٢}$ ∴ ص=٠ ∴ على محور السينات

[٣] (الاختبار ٦) إذا كان $\overleftarrow{أ}$ =(٢ ، ١ ، -٢) ، $\overleftarrow{أ}$ + $\overleftarrow{ب}$ = $\overleftarrow{أ}$ × $\overleftarrow{ب}$ فاوجد $\overleftarrow{ب}$

الحل

نفرض أن $\overrightarrow{ب}$ = (س ، ص ، ع) ∴ (س+٢ ، ص +١ ، ع -٢) = $\begin{vmatrix} \overrightarrow{ع} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{س} \\ -٢ & ١ & ٢ \\ ع & ص & س \end{vmatrix}$

∴ (س+٢ ، ص +١ ، ع -٢) = (ع+٢ص ، -٢س - ٢ع ، ٢ص -س)

∴ س +٢ = ع + ٢ص ∴ س − ٢ص − ع = -٢ ⟸ (١)

، ص +١ = -٢س -٢ع ∴ ٢س + ص +٢ع = -١ ⟸ (٢)

، ع − ٢ = ٢ص − س ∴ س - ٢ص + ع = ٢ ⟸ (٣) وبالحاسبة made+eqn+٢

∴ س = -٢ ، ص = -١ ، ع =٢ ∴ $\overrightarrow{ب}$ = (-٢ ، -١ ، ٢)

[٤] رصد مدير شركة ثلاث جوائز متماثلة يتنافس عليها عشرة موظفين بحيث يمكن لكل موظف الحصول على جائزة أو اكثر بكم طريقة يمكن توزيع هذه الجوائز ؟

الحل

اختيار (١) من (١٠) لاستلام الثلاث جوائز

أو اختيار (١) من (١٠) لاستلام جائزتين و (١) من (٩) لاستلام جائزة

أو اختيار (٣) من (١٠) لاستلام الثلاث جوائز

∴ عدد الطرق = ${}^{١٠}ق_{١} + {}^{١٠}ق_{١} \times {}^{٩}ق_{١} + {}^{١٠}ق_{٣}$ = ١٠ + ٩٠ +١٢٠ = ٢٢٠ طريقة

[٥] أوجد معادلة المستوى الذى يحتوى المستقيم ل١: $\overrightarrow{ر}$=(٠ ، ٣ ، -٥) + ك١(٦ ، -٢ ، -١)

ويوازى المستقيم ل٢: $\overrightarrow{ر}$ =(١ ، ٧ ، -٤) + ك٢(١ ، -٣ ، ٣)

الحل

نلاحظ أن المستقيمين غير متوازيين و غير متقاطعين ∴ متخالفان ∴ المتجه العمودى عليهما هو المتجه العمودى على المستوى المطلوب معادلته (المستقيم الموازى للمستوى يوازى أكثر من مستقيم فيه)

$\overrightarrow{ن}$ = هـ١×هـ٢ = $\begin{vmatrix} \overrightarrow{ع} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{س} \\ -١ & -٢ & ٦ \\ ٣ & -٣ & ١ \end{vmatrix}$ =-٣ $\overrightarrow{س}$ -١٩ $\overrightarrow{ص}$ -١٦ $\overrightarrow{ع}$

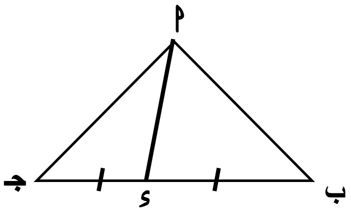
∴ المستوى يمر بالمستقيم الاول ∴ النقطة (٠ ، ٣ ، -٥) تقع فى المستوى

∴ معادلة المستوى هى -٣س -١٩ص -١٦ع = (-٣ ، -١٩ ، -١٦) • (٠ ، ٣ ، -٥)=٢٣

∴ المعادلة هى ٣س + ١٩ص + ١٦ع + ٢٣ =٠

[٦] إذا كان المتجهان $\overleftarrow{\text{أب}}$ =٣ $\overleftarrow{\text{س}}$ -٣ $\overleftarrow{\text{ع}}$ ، $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ = $\overleftarrow{\text{س}}$ -٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$ + $\overleftarrow{\text{ع}}$ هما ضلعان فى Δأبجـ

فإن طول المتوسط المرسوم من الرأس أ = ... وحدة طول (√٣ ، √٦ ، ٢√٣ ، ٣√٢)



من قاعدة المتوسط ∴ $\overleftarrow{\text{أب}}$ + $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{أء}}$

∴ (٣ ، ٠ ، -٣) + (١ ، -٢ ، ١) = ٢ $\overleftarrow{\text{أء}}$

∴ $\overleftarrow{\text{أء}}$ = (٢ ، -١ ، -١) ∴ || $\overleftarrow{\text{أء}}$ || = √٦ وحدة طول

[٧] أثبت أن المستقيمين $\overleftarrow{\text{ل}_١}$ = (٣ ، -١ ، ٢) + ك١ (٤ ، ١ ، ٣) ،

$\overleftarrow{\text{ل}_٢}$ =(٠ ، ٤ ، -١) +ك٢(١ ، -١ ، ٢) متخالفان

شرط التخالف هو عدم التقاطع وعدم التوازى ∵ $\frac{٤}{١} \neq \frac{١}{-١}$ ∴ المستقيمان غير متوازيان

نوجد نقط التقاطع بحل المعدلتين معاً

∴ (٣ ، -١ ، ٢) + ك١ (٤ ، ١ ، ٣)= (٠ ، ٤ ، -١) + ك٢(١ ، -١ ، ٢)

∴ ٣+٤ك١=ك٢ ⇐ (١) ، -١ + ك١ = ٤-ك٢ ⇐ (٢) ، ٢+٣ك١ =-١+٢ك٢ ⇐ (٣)

بحل (١) ، (٢) ∴ ك١= $\frac{٢}{٥}$ ، ك٢ = $\frac{٢٣}{٥}$ بالتعويض فى (٣) الايمن= $\frac{١٦}{٥}$ ، الايسر= $\frac{٤١}{٥}$

لاتحقق المعادلة الثالثة ∴ المستقيمان غير متقاطعان

∴ المستقيمان غير متوازيين وغير متقاطعان ∴ فهما ممتخالفان

[٨] أوجد البعد العمودى من النقطة (٣ ، -١ ، ٧)

للمستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٢ ، -١) ، (٠ ، ٣ ، ٥)

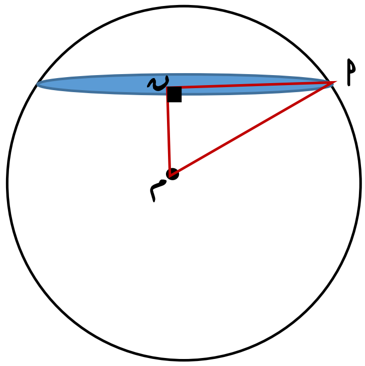
$\overleftarrow{\text{هـ}}$ =(٢ ، -١ ، -٦) ∴ بفرض النقطة أ(٣ ، -١ ، ٧) ، نقطة على المستقيم ب(٢ ، ٢ ، -١)

∴ $\overleftarrow{\text{أب}}$ = (-١ ، ٣ ، -٨) ∴ $\overleftarrow{\text{أب}} \times \overleftarrow{\text{هـ}}$ = $\begin{vmatrix} \overleftarrow{\text{س}} & \overleftarrow{\text{ص}} & \overleftarrow{\text{ع}} \\ -١ & ٣ & -٨ \\ ٢ & -١ & -٦ \end{vmatrix}$ = -٢٤ $\overleftarrow{\text{س}}$ -٢٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$ -٥ $\overleftarrow{\text{ع}}$

طول العمود = $\frac{\|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{هـ}}\|}{\|\overrightarrow{\text{هـ}}\|}$ = $\frac{\sqrt{\text{٥٧٦٤+٤٨٤+٢٥}}}{\sqrt{\text{٤+١+٣٦}}}$ ≈ ٥,١ وحدة طول

[٩] إذا قطع المستوى ٢س – ص - ٢ع + ١٢ = ٠ الكرة (س+٣)^{٢} +(ص+٢)^{٢} +(ع-١)^{٢}=١٥

أوجد مساحة المقطع الناتج



مركز الكرة م(-٣ ، -٢ ، ١) وطول نصف قطرها مم = $\sqrt{\text{١٥}}$

المقطع الناتج من قطع الكرة بمستو عبارة عن دائرة

نوجد بعد المركز عن المستوى = $\frac{|\text{−٦+٢−٢×١+١٢}|}{\sqrt{\text{٤+١+٤}}}$ =٢

فى Δ م م ن من فيثاغورث ∴ م ن = $\sqrt{\text{١١}}$ = طول نصف قطر الدائرة الناتجة

∴ مساحتها = π نق^{٢} = ١١ π وحدة مربعة

[١٠] أثبت أن المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{ر}_1}$ =(٣ ، ١ ، -١) + ك$_{١}$(١ ، ٢ ، ٣) ،

$\overleftrightarrow{\text{ر}_2}$ =(٢ ، ٥ ، ٠) + ك$_{٢}$(١ ، -١ ، ١) متقاطعان

و أوجد نقطة تقاطعهما ثم أوجد معادلة المستوى الذى يحتويهما

هـ$_{١}$ = (١ ، ٢ ، ٣) ، هـ$_{٢}$=(١ ، -١ ، ١) ∴ $\frac{١}{١} \neq \frac{٢}{-١}$ ∴ غير متوازيين ∴ المستقيمان أما متقاطعين

أو متخالفين نوجد نقطة التقاطع بحل المعادلات

∴ (٣ ، ١ ، -١) + ك$_{١}$(١ ، ٢ ، ٣) = (٢ ، ٥ ، ٠) + ك$_{٢}$(١ ، -١ ، ١)

∴ ك$_{١}$ – ك$_{٢}$ = -١ ⟸(١) ، ٢ك$_{١}$ + ك$_{٢}$ = ٤ ⟸ (٢) ، ٣ك$_{١}$ – ك$_{٢}$ = ١ ⟸ (٣)

من (١) ، (٢) ك$_{١}$= ١ ، ك$_{٢}$ =٢ بالتعويض فى (٣) ∴ ٣×١ - ٢ =١ تحقق المعادلة

∴ المستقيمن متقاطعين ونقطة التقاطع بالتعويض فى معادلة المستقيم الاول

∴ $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٣ ، ١ ، -١) + (١ ، ٢ ، ٣) =(٤ ، ٣ ، ٢)

لايجاد معادلة المستوى الذى يحتويهما:

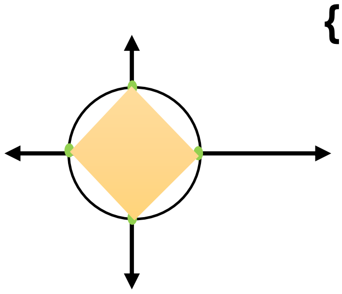
$$\vec{ه}_{١} \times \vec{ه}_{٢} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & -١ & ١ \end{vmatrix} = ٥\vec{س} + ٢\vec{ص} - ٣\vec{ع}$$

∴ معادلة المستوى ٥س + ٢ص - ٣ع = (٥ ، ٢ ، -٣) • (٤ ، ٣ ، ٢)

٥س + ٢ص - ٣ع = ٢٠ + ٦ - ٦ = ٢٠   ∴ ٥س + ٢ص - ٣ع = ٢٠

[١١] أوجد فى ك مجموعة حل المعادلة ع^٤ = ١ ومثل الجذور على مستوى أرجاند

ع = $\sqrt[٤]{١}$ = (جتا٠ + ت جا٠)$^{\frac{١}{٤}}$ = هـ$^{\frac{٠+٢\pi ر}{٤}ت}$ حيث ر ∈ {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣}



∴ الجذور هى {١ ، هـ$^{\frac{\pi}{٢}ت}$ ، هـ$^{\pi ت}$ ، هـ$^{\frac{٣\pi}{٢}ت}$ }

وتمثل على دائرة مركزها نقطة الاصل

وطول نصف قطرها = ١ وتمر برؤوس مربع رؤوسه هى الجذور

[١٢] (اختبارات) إذا كان س عدد مركب فإن عدد حلول المعادلة $\begin{vmatrix} س^{٣}+١ & س-١ \\ س+١ & س^{٣}-١ \end{vmatrix} = ٠$

يساوى .... (٦ ، ٥ ، ٤ ، ٣)

(س^٣ +١)(س^٣ - ١) – (س+١)(س-١) = ٠ من الدرجة السادسة ∴ عدد الحلول فى ك يساوى ٦

[١٣] أثبت أن $(\omega-١)^{٣ن} = (١-\omega^{٢})^{٣ن}$

الايسر = $(١+\omega)^{٣ن}(١-\omega)^{٣ن} = (-\omega^{٢})^{٣ن}(١-\omega)^{٣ن}$

$= (-١)^{٣ن}(\omega)^{٣ن}(١-\omega)^{٣ن} = (\omega-١)^{٣ن}$

[١٤] إذا كان $\begin{vmatrix} \text{لو}_{٢}٣ & ٣ & ٩ \\ ٠ & \text{لو}_{٣}٥ & ٧ \\ ٠ & ٠ & \text{لو}_{٥}\text{س} \end{vmatrix} = ٤$ فإن س =............ [١٦ أ، ٣٢ أ، ٦٤ أ، ١٢٨]

$\text{لو}_{٢}٣ \times \text{لو}_{٣}٥ \times \text{لو}_{٥}\text{س} = ٤$

$$\therefore \quad \text{لو}_{٥}\text{س} = \frac{٤}{\text{لو}_{٢}٣ \times \text{لو}_{٣}٥} = \frac{٤\,\text{لو}_{٣}٢}{\text{لو}_{٣}٥} = \frac{\text{لو}_{٣}١٦}{\text{لو}_{٣}٥} = \frac{\text{لو}\,١٦}{\text{لو}\,٣} \times \frac{\text{لو}\,٣}{\text{لو}\,٥} = \frac{\text{لو}\,١٦}{\text{لو}\,٥} = \text{لو}_{٥}١٦$$

∴س=١٦

[١٥] بدون فك المحدد أثبت أن $\begin{vmatrix} \text{أ}^{٢}+١ & \text{أب} & \text{أجـ} \\ \text{أب} & \text{ب}^{٢}+١ & \text{جـب} \\ \text{أجـ} & \text{جـب} & \text{جـ}^{٢}+١ \end{vmatrix} = \text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}+\text{جـ}^{٢}+١$

$$\begin{vmatrix} \text{أ}^{٢} & \text{أب} & \text{أجـ} \\ \text{أب} & \text{ب}^{٢}+١ & \text{جـب} \\ \text{أجـ} & \text{جـب} & \text{جـ}^{٢}+١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & \text{أب} & \text{أجـ} \\ ٠ & \text{ب}^{٢}+١ & \text{جـب} \\ ٠ & \text{جـب} & \text{جـ}^{٢}+١ \end{vmatrix} =$$

$$\text{أ}^{٢}\begin{vmatrix} ١ & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{ب}^{٢}+١ & \text{جـب} \\ \text{جـ} & \text{جـب} & \text{جـ}^{٢}+١ \end{vmatrix} + (\text{ب}^{٢}+١)(\text{جـ}^{٢}+١) - \text{جـب}\times\text{جـب}$$

$$= \text{أ}^{٢}\begin{vmatrix} ١ & \text{ب} & \text{جـ} \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} + (\text{ب}^{٢}\text{جـ}^{٢}+\text{ب}^{٢}+\text{جـ}^{٢}+١) - \text{ب}^{٢}\text{جـ}^{٢} = \text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}+\text{جـ}^{٢}+١$$

[١٦] بدون فك المحدد أثبت أن $\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ أ^2 & ب^2 & جـ^2 \\ بجـ & جـأ & أب \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} أ^2 & ب^2 & جـ^2 \\ أ^3 & ب^3 & جـ^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

الايمن $= \frac{1}{أبجـ} \begin{vmatrix} أ^2 & ب^2 & جـ^2 \\ أ^3 & ب^3 & جـ^3 \\ أبجـ & أبجـ & أبجـ \end{vmatrix} = \frac{أبجـ}{أبجـ} \begin{vmatrix} أ^2 & ب^2 & جـ^2 \\ أ^3 & ب^3 & جـ^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} أ^2 & ب^2 & جـ^2 \\ أ^3 & ب^3 & جـ^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ #

[١٧] اوجد معامل $س^5$ فى مفكوك $(1 - س + س^2)(1 + س)^{11}$

باستخدام خاصية التوزيع

$(1 - س + س^2)(1 + س)^{11} = (1 + س)^{11} - س(1 + س)^{11} + س^2(1 + س)^{11}$

$= {}^{11}ق_5 - {}^{11}ق_4 + {}^{11}ق_3 = 297$

[١٨] اوجد الحد الخالى من س فى مفكوك $(1 - \frac{1}{س} + س)^5$

الحد الخالى $= 1 +$ الحد الخالى فى مفكوك $(س - \frac{1}{س})^5$ إن وجد

الحد العام فى مفكوك $(س - \frac{1}{س})^5$ $\quad ع_{ر+1} = {}^5ق_ر\, س^{5-ر} (\frac{-1}{س})^ر = {}^5ق_ر (-1)^ر س^{5-2ر}$

بوضع $5 - 2ر = 0$ ∴ $ر = \frac{5}{2}$ ∴ لا يوجد حد خال فى مفكوك $(س - \frac{1}{س})^5$

∴ الحد الخالى من س فى مفكوك $(1 - \frac{1}{س} + س)^5$ هو 1

[١٩] $\sqrt{5 + 12ت} =$ .... ($\pm(2+3ت)$ ، $\pm(3+2ت)$ ، $\pm(2-3ت)$ ، $\pm(3-2ت)$)

بفرض ع = ٥ +١٢ت ∴ ل =١٣ ، س = ٥ ∴ الجذرين هما $\pm\left[\sqrt{\frac{١٣+٥}{٢}}+ت\sqrt{\frac{١٣-٥}{٢}}\right]$

=±(٢+٣ت)