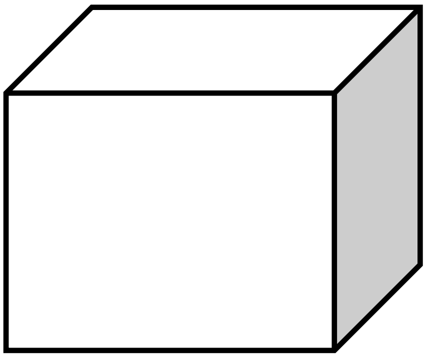
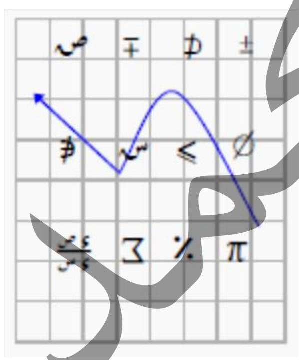
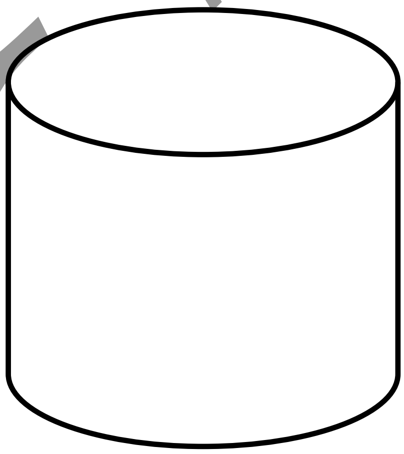
الرائد

المراجعة النهائية في التفاضل و التكامل
للصف الثالث الثانوي

معلم الرياضيات

م.أ.أ /محمد ربيع عبد الوهاب

01120464879

إختر الإجابة الصحيحة :

إشتقاق :

(١) إذا كانت ص = قتا $(\pi - ٢\text{س})$ فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ...

(أ) ٢ قتا (٢ س) ظتا (٢ س) — (ب) ٤ قتا $(\pi$-٢ س) ظتا (٢ س)

(ج) ٢ قتا $(\pi$-٢ س) ظتا $(\pi$-٢ س) — (د) -٢ قتا $(\pi$-٢ س) ظتا $(\pi$-٢ س)

---

(٢) إذا كانت ص = $(\text{قتاس} + \text{ظتاس})^{-١}$ فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ...

(أ) $\frac{-\text{قتاس}}{(\text{قتاس} + \text{ظتاس})^{٢}}$ — (ب) $\frac{-\text{قتاس}}{\text{قتاس} + \text{ظتاس}}$ — (ج) $\frac{\text{قتاس}}{\text{قتاس} + \text{ظتاس}}$ — (د) $\frac{\text{قتاس}}{(\text{قتاس} + \text{ظتاس})^{٢}}$

---

(٣) إذا كان ص = ٤قا^{٢}س فإن ص$'\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = ...

(أ) −٨ — (ب) صفر — (ج) ٤$\sqrt{٢}$ — (د) ١٦

---

(٤) إذا كان د(س) = ظتاس فإن د$''\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = ...

(أ) $\frac{-٤}{٩}$ — (ب) $\frac{٤}{٩}$ — (ج) ٤ — (د) $\frac{٩}{٢}$

---

(٥) إذا كانت ص = جتاس فإن $\frac{\text{ء}^{٢٠١٨}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢٠١٨}}$ = ...

(أ) جتاس — (ب) -جتاس — (ج) جاس — (د) -جاس

---

(٦) إذا كانت د(س) = لـو$_{\text{هـ}}$ (٢ + $\sqrt{٢}$قتاس) حيث ٠ < س < $\frac{\pi}{٢}$ فإن د$'\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = ...

(أ) $\frac{-١}{٤}$ — (ب) $\frac{-١}{٢}$ — (ج) $\frac{١}{٢}$ — (د) ٤

---

(٧) إذا كانت ص = هـ$^{\text{س}}$ جتاس^{٢} فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ...

(أ) − هـ$^{\text{س}}$ جاس^{٢} — (ب) هـ$^{\text{س}}$ (جتاس^{٢} − ٢س جاس^{٢})

(ج) هـ$^{\text{س}}$ جتاس^{٢} − ٢س جاس^{٢} — (د) − ٢س هـ$^{\text{س}}$ جاس

(٨) إذا كانت س = $ن^{٣} - ن$ ، ص = $\sqrt{٣ن + ١}$ فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عندما ن = ١

ⓐ $\frac{١}{٨}$　ⓑ $\frac{٣}{٨}$　ⓒ $\frac{٣}{٤}$　ⓓ ٨

----

(٩) إذا كانت $هـ^{د(س)}$ = $س^{٢} + ١$ فإن $د'(س)$ =.........

ⓐ $\frac{١}{س^{٢}+١}$　ⓑ $\frac{٢س}{س^{٢}+١}$　ⓒ $٢س(س^{٢}+١)$　ⓓ $٢سهـ^{س^{٢}+١}$

----

(١٠) إذا كانت ص = $١٠^{(س^{٢}-١)}$ فإن $\frac{ءص}{ءس}$ =.........

ⓐ $١٠^{س^{٢}-١} \times لو_{هـ}١٠$　ⓑ $٢س \times ١٠^{س^{٢}-١}$　ⓒ $٢س \times ١٠^{س^{٢}-٢}$　ⓓ $٢س(لو_{هـ}١٠) \times ١٠^{س^{٢}-١}$

----

(١١) إذا كانت د(س) = س جا س فإن د″(س) + د (س) = ...

ⓐ ٢جتاس　ⓑ صفر　ⓒ − جاس　ⓓ ٢سجاس

----

(١٢) إذا كانت س = ٥+$قا^{٢}٣\theta$ ، ص = ١−ظا٣θ فإن $\frac{ءص}{ءس}$ =......... عندما $\theta = \frac{\pi}{٤}$.

ⓐ ٢　ⓑ −٢　ⓒ $\frac{١}{٢}$　ⓓ $\frac{-١}{٢}$

----

(١٣) إذا كانت س = ٥+$قا^{٢}٣\theta$ ، ص = ١−ظا٣θ فإن العلاقة الضمنية بين س ، ص هى ....

ⓐ $س^{٢}$ = ص+٥　ⓑ $س^{٢} + ص^{٢} = ٥$　ⓒ $س^{٢} + ص^{٢} = ٦$　ⓓ $س - ٦ = (١ - ص)^{٢}$

----

(١٤) إذا كانت $(س + ص)^{٨} = ٧$ فإن $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ...

ⓐ ١　ⓑ صفر　ⓒ $٥٦(س + ص)^{٧}$　ⓓ −١

----

(١٥) إذا كانت $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س−٣ ، $\frac{ءع}{ءس}$ = $س^{٢}$−١ فإن $\frac{ء^{٢}ص}{ءع^{٢}}$ =......... عندما س = ٢.

ⓐ $\frac{٢}{٢٧}$　ⓑ $\frac{٢}{٩}$　ⓒ صفر　ⓓ $\frac{-٢}{٩}$

----

(١٦) إذا كانت ص = $لو_{هـ}(س + ٢)$ فإن $\frac{ء^{٢٠١٨}ص}{ءس^{٢٠١٨}}$ = ...

ⓐ $\frac{\lfloor ٢٠١٧}{(س + ٢)^{٢٠١٨}}$　ⓑ $\frac{-\lfloor ٢٠١٧}{(س + ٢)^{٢٠١٨}}$　ⓒ $\frac{\lfloor ٢٠١٨}{(س + ٢)^{٢٠١٨}}$　ⓓ $\frac{-\lfloor ٢٠١٨}{(س + ٢)^{٢٠١٧}}$

(١٧) إذا كانت د(س) = لـو$_{هـ}$ (جاس) − لـو$_{هـ}$ (جتاس) فإن $\underset{س \to \frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \frac{د(س) - د\left(\frac{\pi}{4}\right)}{س - \frac{\pi}{4}}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) صفر (د) −٢

---

(١٨) إذا كانت س جا٢ص = ص جتا٢س فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند النقطة $\left(\frac{\pi}{4} , \frac{\pi}{2}\right)$.

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

---

(١٩) إذا كانت د(س) = س^{٢} ، ك(٢) = ٣ ، ك$'$(٢) = −٢ ، ك$''$(٢) = ٥ فإن (د∘ك)$''$(٢) = ...

(أ) ٣٨ (ب) −٣٨ (ج) ١٠ (د) ٣

---

(٢٠) إذا كانت ص = د(س) دالة فردية و كانت دَ(ك) = م فإن دَ(− ك) = ...

(أ) م (ب) −م (ج) صفر (د) غير معرفة

النهايات :

(١) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{\frac{١}{٣س}}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) هـ (د) هـ^{٢}

---

(٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} (١ + س)^{\frac{١}{٣س}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) هـ^{٣} (ج) $\sqrt[٣]{هـ}$ (د) $\frac{هـ}{٣}$

---

(٣) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢^{س} - ١}{٣س}$ = ...

(أ) ٣ لـو$_{هـ}$ ٢ (ب) $\frac{١}{٣}$ لـو$_{هـ}$ ٢ (ج) $\frac{١}{٣}$ لـو$_{٢}$ هـ (د) ٢ لـو$_{هـ}$ ٣

---

(٤) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{لـو_{٥} س}{س - ١}$ = ...

(أ) $\frac{١}{لـو_{٥} هـ}$ (ب) ١ (ج) هـ (د) لـو$_{٥}$ هـ

(٥) $\underset{س \to ٠}{نهـا} \dfrac{لـو_{هـ}(١+٢س)}{٣^{س} - ١} =$ ......

Ⓐ $\dfrac{٢}{٣}$ ⓑ $لـو_{٣} هـ^{٢}$ ⓙ $\dfrac{٣}{٢}$ ⓓ $\frac{١}{٢} لـو_{٣} هـ$

---

(٦) $\underset{س \to هـ}{نهـا} \dfrac{لـو_{هـ} س - ١}{س - هـ} =$ ....

Ⓐ ١ ⓑ هـ ⓙ $\dfrac{١}{هـ}$ ⓓ $-$هـ

---

(٧) $\underset{س \to ٠}{نهـا} (١+جاس)^{\frac{١}{س}} =$ ....

Ⓐ ١ ⓑ صـفر ⓙ $\dfrac{١}{هـ}$ ⓓ هـ

---

(٨) $\underset{س \to ٠}{نهـا} لـو_{هـ}(١+٥س)^{\frac{-٢}{س}} =$ ....

Ⓐ $هـ^{-١٠}$ ⓑ -١٠هـ ⓙ -١٠ لـوهـ ⓓ -١٠

تطبيقات هندسية :

(١) إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = د(س) عند نقطة ما يساوى $\frac{١}{٢}$ وكان الإحداثى السينى لهذه النقطة يتناقص بمعدل ٣ وحدات/ث فإن معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن يساوى ......وحدة / ث

Ⓐ $\dfrac{-١}{٦}$ ⓑ $\dfrac{-٣}{٢}$ ⓙ $\dfrac{١}{٦}$ ⓓ $\dfrac{٣}{٢}$

---

(٢) النسبة بين ميل مماس المنحنى الدالة ص = $لـو_{هـ} ٣ \sqrt{س + ١}$ و ميل مماس المنحنى ص = $لـو_{هـ} ٥ \sqrt{س + ١}$ عند س = ؟ كنسبة ....

Ⓐ ٣ : ٥ ⓑ ٥ : ٣ ⓙ ١ : ١ ⓓ $لـو_{هـ}٣$: $لـو_{هـ}٥$

---

(٣) معادلة المماس لمنحنى الدالة د حيث د(س) = $هـ^{٢س+١}$ عند النقطة $(\frac{-١}{٢} , ١)$ هى ....

Ⓐ ٢ص = س + ١ ⓑ ص = ٢س + ٢ ⓙ ص = ٢س − ٣ ⓓ ٢ص = ٣س + ١

---

(٤) ميل المماس لمنحنى الدالة ص = لــوهـ $\left(\frac{١}{٢}\text{س}\right)$ عندما س = ٤ يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) ٤

----

(٥) معادلة المماس الإنقلابى للدالة د(س) = س ^{٣} + ٣س ^{٢} + ٢ هى......

(أ) ص = −٦س − ٦ (ب) ص = −٣س + ١ (ج) ص = ٢س + ١٠ (د) ص = ٣س − ١

----

(٦) إذا كان المستقيم ص + س = ك مماس لمنحنى الدالة ص = س ^{٢} + ٣س + ١ فإن ك = ...

(أ) −٣ (ب) −٢ (ج) −١ (د) صــفر

----

(٧) إذا كانت ص = لــوهـ (س ^{٢} + ص ^{٢}) فإن ميل المماس للمنحنى عند النقطة (١ , ٠) يساوى ....

(أ) صــفر (ب) ١ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

----

(٨) إذا كان جتا $\sqrt{\pi \text{ص}}$ = ٣س + ١ فإن ميل المماس للمنحنى عند النقطة $\left(\frac{-١}{٣} , \frac{\pi}{٤}\right)$ يساوى ....

(أ) ٣ (ب) −٣ (ج) صــفر (د) ١

----

(٩) إذا كانت $\lim\limits_{\text{ع} \to ١} \frac{\text{د(ع)} - \text{د(١)}}{\text{ع} - ١} = -١$ فإن قياس زاوية ميل المماس لمنحنى الدالة د عند النقطة (١ ، د(١))

يساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{\pi}{٦}$ (ج) $\frac{\pi}{٤}$ (د) $\frac{٣\pi}{٤}$

----

(١٠) المماس لمنحنى الدالة ص + س = هـ $^{\text{س ص}}$ يكون رأسياً عند النقطة ....

(أ) (١ , ١) (ب) (٠ , ١) فقط (ج) (١ , ٠) فقط (د) (٠ , ١) ، (١ , ٠)

معدلات زمنية :

(١) ينصهر مكعب من الثلج محتفظاً بشكله بمعدل ١ سم^{٣}/ث فإن معدل تغير طول حرف المكعب عندما يكون حجمه ٨ سم^{٣}

يساوى ...... سم/ث

(أ) $\frac{-١}{١٢}$ (ب) $\frac{١}{١٢}$ (ج) $\frac{-١}{٦}$ (د) $\frac{١}{٦}$

----

(٢) جسم يتحرك على المنحنى $ص^{٢} = س^{٣}$ إذا كان $\frac{دس}{دن} = \frac{١}{٢}$ وحدة / ث عند ص = −١ فإن $\frac{دص}{دن}$ عند هذه اللحظة يساوى.........

(أ) $\frac{-٣}{٤}$ (ب) $\frac{-٣}{٨}$ (ج) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

---

(٣) مخروط دائرى قائم إذا كان طول كل من نصف قطر قاعدته و إرتفاعه يتزايد بمعدل $\frac{١}{٢}$ سم/ث و فى لحظة ما كان طول نصف قطر القاعدة يساوى ٦ سم و الإرتفاع يساوى ٩ سم فإن معدل تغير حجم المخروط فى تلك اللحظة = ...$سم^{٣}$/ث

(أ) $\frac{١}{٢}\pi$ (ب) ١٠π (ج) ٢٤π (د) ٥٤π

---

(٤) دائرة محيطها ع سم إذا كان طول نصف قطرها يتناقص بمعدل ١,٠ سم/ث فإن معدل تغير مساحتها =........$سم^{٢}$/ث

(أ) −٠,٢ ع (ب) −٠,١ ع (ج) ٠,١ ع (د) $(٠,١)^{٢}$ ع

---

(٥) وعاء فارغ حجمه ٩٠ $سم^{٣}$ يصب فيه الماء بمعدل ٠,٤ $سم^{٣}$/ث فإن الوعاء يمتلئ بعد مرور .... ثانية.

(أ) ٩ (ب) ٢٢٥ (ج) ١٨ (د) ٦

---

(٦) $\triangle$ يتزايد طول قاعدته ل بمعدل ٣ سم/ث بينما يتناقص إرتفاعه ع بمعدل ٣ سم/ث و كانت مساحة سطحة هى م فإن العبارة التى من المؤكد أنها صحيحة فيما يلى هى ....

(أ) م تتزايد دائماً (ب) م تتناقص دائماً (ج) م تتناقص فقط ل > ع (د) م تتناقص فقط ل < ع

---

(٧) إذا كان محيط صفيحة مربعة الشكل يتزايد بمعدل ٠.٤ سم/ث و تتزايد مساحة صطحها بمعدل ٦ $سم^{٢}$/ث فإن طول ضلع الصفيحة فى تلك اللحظة يساوى ......سم

(أ) ٣٠ (ب) ٥٠ (ج) ٤٠ (د) ٦٠

---

(٨) إذا كان معدل تزايد قطر بالون كروى يساوى ١ سم/د عندما كان طول قطره ٤ سم فإن معدل تغير حجمه عند تلك اللحظة يساوى ....

(أ) ٢π (ب) ٨π (ج) ١٦π (د) ٤π

---

(٩) تتحرك نقطة على المنحنى **$ص = س^{٢} - ٣س$** فإذا كانت سرعة إحداثيها السينى تساوى سرعة إحداثيها الصادى فإن ميل المماس للمنحنى عند تلك النقطة يساوى.........

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

سلوك الدالة :

(١) إذا كان لمنحنى الدالة د نقطة إنقلاب عند س = ٢ حيث د(س) = س^{٣} + ك س^{٢} + ٤ فإن ك = ...

(أ) −٦　(ب) −٣　(ج) ٣　(د) ٦

----

(٢) أكبر قيمة للمقدار ٤س − س^{٢} حيث س ∈ ح هى ....

(أ) ٤　(ب) ٨　(ج) ١٦　(د) ٣٢

----

(٣) منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} + ٢ محدب لأعلى عندما س ∈ ....

(أ)]−∞ , ٠[　(ب)]−∞ , ١[　(ج)]١ , ٣[　(د)]١ , ∞[

----

(٤) د(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} + ٥ متناقصة عندما س ∈ ....

(أ)]٠ , ٣[　(ب)]٠ , ٢[　(ج) [٠ , ٢]　(د) ح − [٠ , ٢]

----

(٥) إذا كانت د$^{/}$(س) = أس^{٣} − ٨ب حيث أ ، ب ثوابت وكان لمنحنى الدالة د(س) نقطة عظمى محلية هى (٢ , ٥) فإن أ × ب ∈ ......

(أ)]٢ , ∞[　(ب)]٠ , ∞[　(ج)]−∞ , ٠[　(د)]٨ , ∞[

----

(٦) إذا كانت س + ص = ك حيث س ≻ ٠ ، ص ≻ ٠ فإن س ص قيمة عظمى عندما ......

(أ) س = ك ص　(ب) ك س = ص　(ج) س = ص　(د) س ص = ١

----

(٧) العبارة التى من المؤكد انها صحيحة فيما يلى هى ......

(أ) (أ , د(أ)) نقطة حرجة إذا كان د$^{/}$(أ) = ٠ فقط.　(ب) (أ , د(أ)) نقطة إنقلاب للدالة إذا كان د$^{//}$(أ) = ٠

(ج) إذا كان د$^{/}$(أ) = ٠ فإن د(أ) قيمة عظمى محلية.

(د) إذا كان د$^{/}$(أ) = ٠ و د$^{//}$(أ) ≻ ٠ فإن د(أ) قيمة صغرى محلية.

----

(٨) إذا كانت د(س) دالة متصلة على ح فإن العبارة التى من المؤكد انها صحيحة فيما يلى هى ......

(أ) (أ , د(أ)) نقطة إنقلاب إذا كان د$^{//}$(أ) = ٠ أو د$^{//}$(أ) غير معرفة.

(ب) (أ , د(أ)) نقطة إنقلاب للدالة إذا كان د$^{//}$(أ) = ٠ و د$^{//}$(أ$^{+}$) × د$^{//}$(أ$^{-}$) ≺ ٠

ⓙ $(أ\ ,\ د(أ))$ نقطة إنقلاب للدالة إذا كان $د^{//}(أ)$ غير معرفة و $د^{//}(أ^{+}) \times د^{//}(أ^{-}) \succ ٠$.

ⓓ $(أ\ ,\ د(أ))$ نقطة إنقلاب للدالة إذا كان $د^{/}(أ)$ لها وجود و $د^{//}(أ^{+}) \times د^{//}(أ^{-}) \succ ٠$.

----

(٩) أكبر قيمة لميل منحنى الدالة $د(س) = -س^{٣} + ٦س^{٢} + ٢س + ١$ تساوى ......

Ⓐ ١٤ Ⓑ ١٦ Ⓒ ١٩ Ⓓ -١٣

----

(١٠) إذا كانت $د(س) = \sqrt{س^{٢} - ١٦س}$ فإن الدالة لها نقط حرجة عندما س=......

Ⓐ ٨ Ⓑ صفر ، ١٦ Ⓒ ٠ , ١٦ , ٨ Ⓓ صفر

----

(١١) منحنى الدالة $د(س) = س - ٢\sqrt{س}$ له نقطة حرجة عندما س = ...

Ⓐ صفر Ⓑ ١ Ⓒ ٠ ، ١ Ⓓ ١ ، -١

----

(١٢) منحنى الدالة $ص = \frac{-٥}{س - ٢}$ محدب لأسفل إذا كانت ....

Ⓐ $س \prec ٢$ Ⓑ $س \succ ٢$ Ⓒ $س \succ ٥$ Ⓓ $س \prec ٠$

----

(١٣) إذا كانت $د(س)$ دالة كثيرة الحدود و الجدول المجاور يبين بعض قيم $د^{//}(س)$ فإن العبارة التى من المؤكد أنها صحيحة فيما يلى هى ....

س	٠	١	٢	٣
$د^{//}(س)$	٥	٠	-٧	٤

Ⓐ الدالة $د(س)$ تزايدية فى $]٠ , ٢[$ Ⓑ الدالة $د(س)$ تناقصية فى $]٠ , ٢[$

Ⓒ الدالة $د(س)$ يتغير تحدبها فى $]٠ , ٢[$ Ⓓ الدالة $د(س)$ لها قيمة عظمى عند س=١

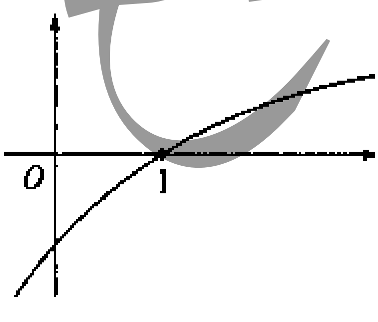
----

(١٤) إذا كانت $د(س) = س + \frac{١}{س}$ فإن الدالة تزايدية فى الفترة ....

Ⓐ $|س| \geq ١$ Ⓑ $|س| \leq ١$ Ⓒ $|س| \prec ١$ Ⓓ $|س| \succ ١$ ، $س \neq ٠$

----

(١٥) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الدالة $د(س)$ القابلة للإشتقاق مرتين عند س = ١ فإن العبارة الصحيحة فيما يلى هى........



Ⓐ $د^{/}(١) \succ د^{//}(١) \succ د(١)$ Ⓑ $د^{//}(١) \succ د^{/}(١) \succ د(١)$

Ⓒ $د(١) \succ د^{//}(١) \succ د^{/}(١)$ Ⓓ $د^{//}(١) \succ د(١) \succ د^{/}(١)$

التكامل :

(١) $\int$ ظاθ ءθ = ...

(أ) -لـو$_{هـ}$|جتاθ| + ث (ب) -لـو$_{هـ}$جتاθ + ث (ج) لـو$_{هـ}$جتاθ + ث (د) لـو$_{هـ}$|جتاθ| + ث

---

(٢) $\int$ ٤س هـ$^{س^{٢}}$ ءس = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$هـ$^{س^{٢}}$ + ث (ب) هـ$^{س^{٢}}$ + ث (ج) ٢هـ$^{س^{٢}}$ + ث (د) ٤هـ$^{س^{٢}}$ + ث

---

(٣) $\int \frac{١}{س\,لـو_{هـ}س^{٣}}$ ءس = ...

(أ) ٣لـو$_{هـ}$|س| + ث (ب) ٣لـو$_{هـ}$|لـو$_{هـ}$س| + ث (ج) $\frac{١}{٣}$لـو$_{هـ}$|س| + ث (د) $\frac{١}{٣}$لـو$_{هـ}$|لـو$_{هـ}$س| + ث

---

(٤) $\int$ س(س^{٢} + ٣)^{٥} ءس = ...

(أ) $\frac{١}{٦}$(س^{٢} + ٣)^{٦} + ث (ب) $\frac{١}{١٢}$(س^{٢} + ٣)^{٦} + ث

(ج) $\frac{١}{٤}$(س^{٢} + ٣)^{٤} + ث (د) $\frac{١}{٨}$(س^{٢} + ٣)^{٤} + ث

---

(٥) $\int$ قا^{٤}س ظاس ءس = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$قا^{٥}س + ث (ب) $\frac{١}{٤}$قا^{٤}س + ث (ج) $\frac{١}{٣}$ظا^{٣}س + ث (د) $-\frac{١}{٣}$ظا^{٣}س + ث

---

(٦) $\int$(٤-قتاس ظتاس) ءس = ...

(أ) ٤س-قتاس + ث (ب) ٤س+قتاس + ث (ج) ٤س-ظتاس + ث (د) ٤س+ظتاس + ث

---

(٧) $\int$(قتا^{٤}س-قتا^{٢}س ظتا^{٢}س) ءس = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$قتا^{٥}س-$\frac{١}{٣}$ظتا^{٣}س + ث (ب) -ظاس + ث

(ج) -ظتاس + ث (د) $\frac{١}{٣}$قتا^{٣}س + ث

---

(٨) $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س} - ٣}$ ءس = ...

ⓐ $-\frac{1}{2}$ (هـ$^{-س}$ − ٣) + ث ⓑ − لوهـ |هـ$^{-س}$ − ٣| + ث

ⓒ لوهـ |هـ$^{-س}$ − ٣| + ث ⓓ $\frac{1}{2}$ لوهـ |هـ$^{-س}$ − ٣| + ث

---

(٩) إذا كانت $\int$ (٢س − ١) هـ$^{٢س+٣}$ ءس = ص ع − $\int$ ع ءص فإن $\int$ ع ءص = ...

ⓐ هـ$^{٢س+٣}$ + ث ⓑ $\frac{1}{2}$ هـ$^{٢س+٣}$ + ث ⓒ − هـ$^{٢س+٣}$ + ث ⓓ − $\frac{1}{2}$ هـ$^{٢س+٣}$ + ث

---

(١٠) إذا كانت $\int$ (٢س + ٣) لوهـ س ءس = ص ع − $\int$ ع ءص فإن ص ع = ...

ⓐ ٢س لوهـ س ⓑ (٢س+٣) لوهـ س ⓒ $\frac{1}{2}$ (٢س+٣) لوهـ س ⓓ س(س+٣) لوهـ س

---

(١١) إذا كانت د(س) = هـ$^{س+هـ^{س}}$ فإن المشتقة العكسية للدالة د(س) يمكن أن تكون هى ....

ⓐ $\frac{هـ^{١+هـ^{س}}}{١+هـ^{س}}$ ⓑ (١ + هـ^{س}) هـ$^{هـ+هـ^{س}}$ ⓒ هـ$^{١+هـ^{س}}$ ⓓ هـ$^{هـ^{س}}$

---

(١٢) إذا كان $\int$ د(س) جاس ءس = − د(س) جتاس + $\int$ ٣س^{٢} جتاس ءس فإن د(س) = ...

ⓐ ٣س^{٢} ⓑ س^{٣} ⓒ − س^{٣} ⓓ جاس

---

(١٣) $\int_{٠}^{٢}$ (٢ − |س|) ءس = ...

ⓐ ٤ ⓑ ٢ ⓒ صفر ⓓ ١

---

(١٤) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$ (جاس + جتاس) ءس = ...

ⓐ ٤ ⓑ ٢ ⓒ صفر ⓓ π

---

(١٥) إذا كان $\int_{-٢}^{٢}$ د(س) ءس = ١٢ ، $\int_{-٢}^{٥}$ د(س) ءس = ١٦ فإن $\int_{٢}^{٥}$ د(س) ءس = ...

ⓐ −٢٨ ⓑ −٤ ⓒ ٤ ⓓ ٢٨

---

(١٦) إذا كانت $د(س) = \begin{cases} س + ١ & , \quad س \prec ٠ \\ جتا\,\pi س & , \quad س \geq ٠ \end{cases}$ فإن $\int_{-١}^{١} د(س)\ ءس =$ ....

أ) $\frac{١}{٢} + \frac{١}{\pi}$ ب) $\frac{-١}{٢}$ ج) $\frac{١}{٢} - \frac{١}{\pi}$ د) $\frac{١}{٢}$

---

(١٧) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{هـ^{ظاس}}{جتا^{٢}س}\ ءس =$ ....

أ) هـ − ١ ب) هـ + ١ ج) هـ د) ١

---

(١٨) إذا كان $\int_{-١}^{١} هـ^{-س^{٢}}\ ءس = ك$ فإن $\int_{-١}^{٠} هـ^{-س^{٢}}\ ءس =$ ....

أ) ك ب) ٢ك ج) $\frac{١}{٢}$ك د) $-\frac{١}{٢}$ك

---

(١٩) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{٤س + جاس}{س^{٢} + جتاس}\ ءس =$ ....

أ) $-\pi$ ب) صفر ج) π د) ٢π

---

(٢٠) إذا إستخدمنا التعويض $ص = \frac{١}{٢}س$ فإن $\int_{٢}^{٤} \frac{١ - (\frac{١}{٢}س)^{٢}}{س}\ ءس =$ ....

أ) $\int_{٢}^{٤} \frac{١ - ص^{٢}}{ص}\ ءص$ ب) $\int_{٢}^{٤} \frac{١ - ص^{٢}}{٢ص}\ ءص$ ج) $\int_{١}^{٢} \frac{١ - ص^{٢}}{ص}\ ءص$ د) $\int_{١}^{٢} \frac{١ - ص^{٢}}{٢ص}\ ءص$

ثانياً:

(١) إذا كانت $\frac{ءص}{ءس} = قتا^{٢}س$ ، ص = ٢ عندما $س = \frac{\pi}{٤}$ فإن ص = ...

أ) −(٢+ظتاس) ب) −(٣+ظتاس) ج) ٢−ظتاس د) ٣−ظتاس

---

(٢) إذا كانت $\frac{ءص}{ءس} = س + \frac{١}{س}$ ، $ص = \frac{١}{٢}$ عندما س = ١ فإن ص= .... عندما س = هـ

أ) $هـ^{٢} - هـ$ ب) $\frac{هـ^{٢} - ١}{٢}$ ج) $\frac{هـ^{٢} + ١}{٤}$ د) $\frac{هـ^{٢}}{٢} + ١$

(٣) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة عليه يساوى $\frac{١}{\text{س}-٢}$ و كان المنحنى يمر بالنقطة عند (٣ , ٠) فإن

د(هـ^{٢}+٢) = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) لوهـ ٢ (د) لوهـ ٣

----

(٤) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = $\frac{١}{\text{س}}$ ،المستقيمين ص = ١ ، ص = ٢ و محور الصادات دورة كاملة حول محور الصادات = ...

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (ج) π (د) ٢π

----

(٥) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى ص = س^{٣} و المستقيمين ص = ٠ ، س = ٢ تساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٤ (د) ٨

----

(٦) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى ص = $\sqrt{٤-\text{س}^{٢}}$ و محور السينات مقدرة بالوحدات المربعة تساوى .....

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٢π (د) ٤π

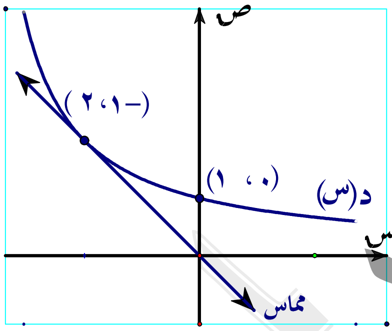
----

(٧) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الدالة د(س) رسم لها مماس

عند النقطة (−١ , ٢) فإن $\int_{-١}^{٠}$ س [د//(س)] ءس = ...

(أ) (ب) ٤ ٣

(ج) (د) ١ −١

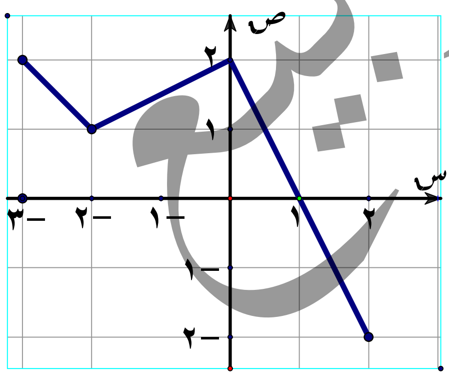


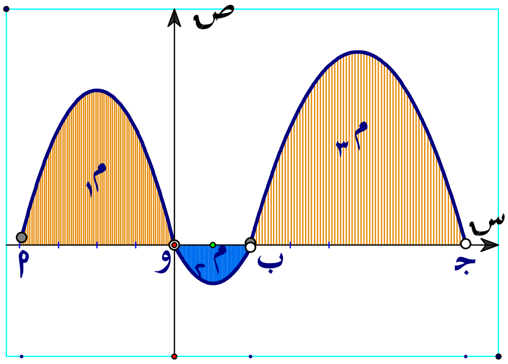
----

(٨) إذا كان المنحنى المجاور يمثل منحنى الدالة الخطية د(س) معرفة بأكثر من قاعدة و كانت ر(س) = $\int_{-٢}^{\text{س}}$ د(ن) ءن فإن العدد الذى له أكبر قيمة هو ....

(أ) ر(٢) (ب) ر(−٢)

(ج) ر(٠) (د) ر(١)





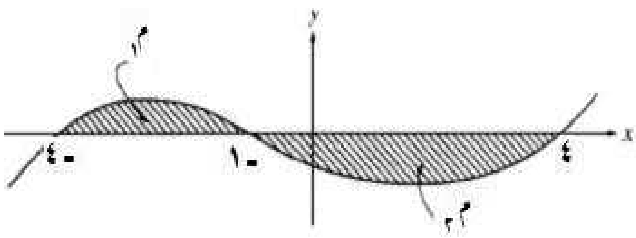
(٩) فى الشكل المقابل إذا كان $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{د}(\text{س})\ \text{ءس} = ٨\int_{\text{ب}}^{\text{و}} \text{د}(\text{س})\ \text{ءس}$

و كان $\text{م}_١ + \text{م}_٢ + \text{م}_٣ = ٣٠$ وحدة مربعة فإن

$\text{م}_٢ =$ ...... وحدة مربعة.

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) ٤



(١٠) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الدالة $\text{ر}(\text{س})$ و كانت

$\text{م}_١$ ، $\text{م}_٢$ عددان موجبان يمثلان مساحاتى المنطقتين المظللتين

فإن $\int_{-٤}^{٤} \text{ر}(\text{س})\text{ءس} - ٢\int_{-١}^{٤} \text{ر}(\text{س})\text{ءس} =$ ....

(أ) $\text{م}_١ + \text{م}_٢$ (ب) $\text{م}_١ - \text{م}_٢$ (جـ) $٢\text{م}_١ - \text{م}_٢$ (د) $\text{م}_١ + ٢\text{م}_٢$

أسئلة إنتاج الإجابة

المشتقات :

(١) إوجد المشتقة الأولى للدالة $ص = س^{٢}\ قا\left(\frac{١}{س}\right)$

(٢) إوجد قيمة ميل المماس للمنحنى $ص = ٢ظتاس + \sqrt{٢}\ قاس$ عند $س = \frac{\pi}{٤}$

(٣) إذا كانت $ص = جتا(٢\pi\theta)$ ، $س = جا(٢\pi\theta)$ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عندما $\theta = \frac{١}{٦}$.

(٤) إوجد قيمة البارامتر $ن$ التى عندها يكون للمنحنى $س = ٢ن^{٣} - ٥ن^{٢} + ٤ن + ٩$ ، $ص = ٢ن^{٢} + ن - ٥$

(أ) مماس رأسى (ب) مماس أفقى

(٥) بإستخدام الإشتقاق البارامترى إوجد مشتقة $س - جاس$ بالنسبة $١ - جتاس$ عند $س = \frac{\pi}{٣}$.

(٦) إذا كانت $ص = \sqrt{٢س + ٥}$ أثبت أن $(٢س + ٥)\frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}} + ٣\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٠$

(٧) إذا كانت $ص^{٢} + س^{٢}ص^{٢} = ٨$ أثبت أن $(س^{٢} + ١)\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + ٣س\frac{ءص}{ءس} + ص = ٠$

(٨) إذا كانت $ص^{٢} + أس^{٣} - ب س = جـ$ أثبت أن $ص ص'' + (ص')^{٢} + ٣أس = ٠$

(٩) إذا كانت $جا٢س - جتا٣ص = ٠$ أثبت أن $٣\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}\ ظا٣ص + ٩\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢} - ٤ = ٠$

(١٠) إذا كانت $س ص = ١$ أثبت أن $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + ٣ص\frac{ءص}{ءس} + ص^{٣} = ٠$

(١١) إذا كانت $ص = س^{٣} + ١$ ، $ع = س^{٢} + ٣$ أوجد قيمة $\frac{ء^{٢}ع}{ءص^{٢}}$ عندما $س = ٢$

(١٢) إذا كانت $س^{٢} = ٢ن - ٣$ ، $ص = ٢ن^{٢} - ١$ أثبت أن $٣\frac{ءص}{ءس} - س\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} - ١٢س = ٠$

(١٣) إذا كانت $س = جا٢ن$ ، $ص = جتا٢ن$ فإوجد $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ عندما $ن = \frac{\pi}{٢}$.

(١٤) إذا كانت ص = ظا^{٢}س فأثبت أن $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ =٢(١ + ص)(١+٣ص)

---

(١٥) إذا كانت ص = س $i^{س}$ فاثبت أن س$\frac{ءص}{ءس}$ = ص(١ + س)

تطبيقات هندسية

(١) أوجد معادلة كل من المماس و العمودى للمنحنى س^{٢} + ص^{٢} – ٦ص – ١٦ = ٠ عند نقطة تقاطعه مع محور الصادات حيث ص > ٠

---

(٢) أوجد معادلة كل من المماس و العمودى للمنحنى س = صقاس عند النقطة التى إحداثيها السينى π .

---

(٣) إذا كانت المعادلتان البارمتريان لمنحنى الدالة ص = د(س) هما س =قا$^{٢}\theta$ – ١ ، ص =ظاθ كل من فإوجد معادلة المماس و العمودى عند $\theta = \frac{-\pi}{٤}$.

---

(٤) أثبت أن المنحنيان ص = س^{٢} – س + ٢ ، ص = ٣س – س^{٢} متماسان و أوجد معادلة المماس المشترك لهما.

---

(٥) أوجد نقط تقاطع المنحنيين سص = ٢ ، س^{٢} – ص^{٢} = ٣ و برهن أنهما يتقاطعان على التعامد .

---

(٦) أوجد قيم الثوابت ؟ ، ب ، ج حتى يكون للمنحنى ص = ؟س^{٣} + بس ، ص =جس^{٢} – س مماس مشترك عند النقطة (-١ , ٢)

---

(٧) إوجد مساحة $\triangle$ المحدود بمحور السينات ، المماس ، العمودى عليه للمنحنى ٣س^{٢} + ص^{٢} = ١٢ عند النقطة (-١ , ٣) الواقعة على المنحنى.

---

(٨) أوجد النقط الواقعة على المنحنى ٢ص^{٢} – ٨ ص + س = ٠ و التى عندها المماس يوازى محور الصادات.

---

(٩) أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = س^{٢} – س و التى عندها المماس يمر بالنقطة (١ ، – ٤) .

---

(١٠) إوجد النقط الواقعة على محور الصادات بحيث يصنع المماسان المرسومان منها للمنحنى ٤ص + س^{٢} = ٠ مع المستقيم المار بنقطتى التماس مثلث متساوى الأضلاع.

المعدلات الزمنية :

(١) بالون كروى مملوء بالغاز يتسرب منه بمعدل س سم^3/ث. أثبت أن معدل نقص مساحته فى اللحظة التى يكون فيها طول نصف قطره نق سم يساوى $\frac{٢س}{نق}$ سم^2/ث.

---

(٢) مكعب يتمدد بالحرارة فيزداد طول حرفه بمعدل ٠.٠٢سم/د و تزداد مساحة سطحه فى لحظة ما بمعدل ٠.٧٢سم^2/د أوجد طول حرف المكعب فى هذه اللحظة و معدل الزيادة فى حجمه حينئذ.

---

(٣) جسم معدنى على شكل متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ، طول ضلعها يتزايد بمعدل ١سم/د و ارتفاعه يتناقص بمعدل ٢سم/د. أوجد معدل تزايد حجمه عندما يكون طول ضلع قاعدته ٥سم و ارتفاعه ٢٠سم، بعد كم دقيقة يتوقف تغير حجم متوازى المستطيلات عن الزيادة

---

(٤) يتمدد هرم رباعى منتظم من المعدن ارتفاعه يساوى ضلع قاعدته فيزداد حجمه بمعدل ١سم^3/ث ، إذا كان معدل تزايد كل من ارتفاع الهرم و طول قاعدته يساوى ٠.٠١ سم/ث فأوجد طول ضلع قاعدته.

---

(٥) أ ب جـ $\triangle$ قائم الزاوية فى جـ ، مساحته ثابتة و تساوى ٢٤ سم^2 ، إذا كان معدل تغير بَ يساوى ١سم/ث فأوجد معدل تغير كل من أَ ، ق($\hat{أ}$) عند اللحظة التى يكون فيها بَ يساوى ٨سم.

---

(٦) مثمن منتظم طول ضلعه ١٠سم و يتزايد بمعدل ٠.٢سم/ث أوجد معدل تزايد مساحته.

---

(٧) تتحرك النقطة أ(س ، ص) على منحنى الدالة ص = س^3 + س بحيث $\frac{دص}{دن}$ = ٢ وحدة*ث أوجد معدل التغير فى مساحة المثلث أ و ب حيث " و " نقطة الأصل ، النقطة ب(٠ ، ٦) فى اللحظة التى يكون فيها الإحداثى السينى للنقطة المتحركة يساوى ٣.

---

(٨) قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم و قياس زاويتها المركزيه س ْ و يتغير بمعدل ٣ ْ/د أوجد معدل تغير مساحتها عندما س = ٦٠ ْ.

---

(٩) يستند سلم طوله ٥ م بأحد طرفيه على حائط رأسى و بطرفه الآخر على أرض أفقية فإذا أنزلق الطرف السفلى للسلم مبتعداً عن الحائط بمعدل $\frac{١}{٢}$ م/دقيقة . فأوجد معدل إنخفاض الطرف العلوى للسلم عندما يكون الطرف السفلى على بعد ٣ م من الحائط. ثم أوجد بعد الطرف السفلى عن الحائط عندما يتحرك الطرفان بنفس المعدل.

---

(١٠) مثلث متساوى الساقين طول قاعدته ٨ سم يتغير إرتفاعه بمعدل ٢ سم/د. إوجد معدل التغير فى زاوية رأسه عندما يكون طول إرتفاعه ٦ سم.

---

(١١) رجل طوله ١٨٠سم يقف أمام مصباح يرتفع عن سطح الأرض بمقدار ٥.٤ متراً . فإذا تحرك الرجل مبتعداً عن المصباح على طريق أفقى بسرعة ثابته ٣ م/ث فاحسب

$\boxed{١}$ معدل تغير طول ظل الرجل. $\boxed{٢}$ سرعة نهاية ظل الرجل .

$\boxed{٣}$ معدل تغير بعد رأس الرجل عن المصباح عندما يكون الرجل على بعد ٤.٨ م من قاعدة المصباح .

---

(١٢) ينسكب الماء في وعاء إسطوانى الشكل بمعدل ٢ سم^{٣}/ث اوجد معدل التغير فى إرتفاع الماء علما بان طول نصف قطر قاعدة الإسطوانة يساوى ٢ سم .و إذا كان إرتفاع الوعاء ٢.٨ سم فأوجد متى يمتلئ الوعاء معتبراً $\pi = \frac{٢٢}{٧}$

سلوك الدالة :

(١) عين فترات تزايد و تناقص الدالة د(س)=جاس + جتاس حيث س$\in \left]٠ , \frac{٣\pi}{٢}\right[$.

---

(٢) عين فترات تزايد و تناقص الدالة د(س)=س − هـ^{س} .

---

(٣) عين فترات تزايد و تناقص الدالة د(س)=س + لـو$_{هـ}$ س .

---

(٤) عين القيم العظمى و الصغرى المحلية إن وجدت للدالة د(س) = س^{٣} − ٩س^{٢} + ٢٤س + ١٠ مبيناً نوعها

---

(٥) عين القيم العظمى و الصغرى المحلية للدالة د(س) = $\sqrt[٣]{(س - ١)^{٢}}$ + ٢ مبيناً نوعها إن وجدت

---

(٦) عين القيم العظمى و الصغرى المحلية للدالة د(س) = $\frac{س^{٢}}{١ - س}$ + ٢ مبيناً نوعها إن وجدت

---

(٧) عين القيم العظمى و الصغرى المحلية للدالة د(س) = لـو$_{هـ}$(هـ^{٢س} − ٢هـ^{س} + ٣) مبيناً نوعها إن وجدت

---

(٨) عين القيم العظمى و الصغرى المحلية للدالة د(س) = هـ$^{\frac{١}{س}}$ $(\frac{١}{س} - ٢)$ مبيناً نوعها إن وجدت.

---

(٩) عين القيم العظمى و الصغرى المحلية للدالة د(س) = س^{٢} − ١ − ٢ لـو$_{هـ}$|س| مبيناً نوعها إن وجدت.

(١٠) أوجد مناطق التحدب لأعلى و لأسفل و نقط الإنقلاب إن وجدت لمنحنى الدالة د (س) = $س^٣ + ٢س^٢ - ٤س - ٨$

---

(١١) إذا كانت للدالة د حيث د (س) = $س^٣ + أ س^٢ + ب س$ نقطة إنقلاب عند النقطة (٢ ، ٢) عين قيمة الثابتين أ ، ب .

---

(١٢) عين القيم العظمى و الصغرى **المطلقة** إن وجدت لكل من الدالتين الآتيتين في الفترة المعطاه:

(أ) **د(س) = $٢ + ٣ س - س^٣$ فى [١ ، ٣]** (ب) **د(س) = $س^٢ هـ^{س}$ فى [-٣ ، ١]**

---

(١٣) أرسم منحنى الدالة د (س) = $٢ + ٣ س - س^٣$

تطبيقات على القيم العظمى و الصغرى :

(١) مثلث قائم الزاوية طول وتره ٢٦ سم. إوجد طول كل من ضلعى القائمة بحيث يكون طول العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر أكبر ما يمكن.

---

(٢) إذا كان المستقيم ل يقطع محورى الإحداثيات فى النقطتين أ ، ب و يمر بالنقطة ج = (٨ ، ١) أوجد أصغر طول للقطعة المستقيمة $\overline{أ ب}$.

---

(٣) إوجد أكبر مساحة لمنطقة مستطيلة الشكل مرسومة داخل △ و أ ب فيها ضلعان منطبقان على محورى الإحداثيات حيث أ = (٣ ، ٠) ، ب = (٠ ، ٤) ، و = (٠ ، ٠).

(٤) $\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م ، هـ ∈ للدائرة ، المماس للدائرة عند هـ يقطع المماس المرسوم عند أ فى ج ، يقطع المماس المرسوم عند ب فى د أثبت أن أصغر مساحة لشبه المنحرف أ ب د ج تساوى ضعف مربع طول نصف قطر الدائرة.

---

(٥) أوجد بعدى أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث متساوى الساقين طول قاعدته ١٨سم ، إرتفاعة ١٢سم بحيث تقع رأسان منه على قاعة المثلث و الرأسان الآخران على كل من ساقى المثلث.

---

(٦) متوازي مستطيلات حجمة ٥٧٦سم^٢ و النسبة بين طولى قاعدتية ٢ : ١ أوجد أبعاد متوازي المستطيلات التى تجعل مساحتة السطحية أصغر ما يمكن.

التكامل:

(أولاً)

(1) $\int (1+ظا^{2}س)جتا^{2}س \; ءس$

(2) $\int \frac{ءس}{\sqrt{س}\,(1+\sqrt{س})^{3}}$

(3) $\int (س^{2}+5)\sqrt{س-1} \; ءس$

(4) $\int س\, هـ^{-2س} \; ءس$

(5) $\int \frac{لو_{هـ}س}{\sqrt{س}} \; ءس$

(6) $\int س جاس \; ءس$

(7) $\int \frac{4س}{\sqrt[3]{2س+1}} \; ءس$

(8) $\int هـ^{\sqrt{س}} \; ءس$

(9) $\int \frac{لو_{هـ}س}{س^{2}} \; ءس$

(10) $ت = \int س\,(لو_{هـ}س)^{2} \; ءس$

(11) $\int س^{3}\sqrt{4-س^{2}} \; ءس$

(12) $\int (3+جاس)^{5} جتاس \; ءس$

(13) $\int \frac{قا^{2}(لو_{هـ}س)}{س} \; ءس$

(14) $\int س^{2}\sqrt[3]{3س^{3}+1} \; ءس$

(15) $\int لو_{هـ}(س+1) \; ءس$

(16) $\int س^{3} لو_{هـ}س \; ءس$

(17) $\int س قا^{2}س \; ءس$

(18) $\int \frac{3س+5}{هـ^{2س}} \; ءس$

(19) $\int \frac{س\, هـ^{س}}{(س+1)^{2}} \; ءس$

(20) $\int_{-3}^{3} |س^{2}-4| \; ءس$

(ثانياً)

(1) إذا كان $\int_{3}^{أ-1} د(س)ءس = \int_{2}^{3} 2د(2س-1)ءس$ فأوجد قيمة أ.

---

(2) إوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة $\left(\frac{\pi}{2} , \frac{\pi^{2}}{4}+9\right)$ إذا كان ميل المماس له عند أى نقطة عليه (س ، ص) يعطى بالعلاقة $م = 2س + \frac{1}{2}قا^{2}\frac{س}{2}$

---

(3) إوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطتين $\left(\frac{\pi}{4} , 5\right)$ ، $\left(\frac{3\pi}{4} , 1\right)$ إذا كان ميل المماس له عند أى نقطة عليه (س ، ص) يعطى بالعلاقة $م = -أ قتا^{2} س$.

(٤) إذا كان ميل العمودى لمنحنى عند أى نقطة عليه (س ، ص) معطى بالعلاقة م = -قتا **س** قا **س** أوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة $\left(\frac{\pi}{٦} \text{ , } ١\right)$

----

(٥) منحنى ميل المماس له عند أى نقطة عليه (س ، ص) يعطى بالعلاقة $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣}{ص + \sqrt{ص}}$ أوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة ($\frac{١}{١٨}$ ، ١) .

----

(٦) إذا كان منحنى الدالة ص = د (س) له قيمة عظمى محلية عند النقطة (٢ ، ٧) و كانت $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = ٢ – ٦ س أوجد معادلة المنحنى .

----

(٧) إذا كانت ص $\frac{ءص}{ءس}$ + ٢ س = ٣ و كان المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٢) فإوجد العلاقة بين س ، ص

----

(٨) إذاكان معدل تغير ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة عليه هو ٦س – ٣ أوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة (٢ ، ٢) و المماس له عند س = ١ يكون أفقياً .

----

(٩) إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة عليه يعطى بالعلاقة $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ $س^٢$ – ١٨س + ٢٤ و للمنحنى قيمة صغرى محلية تساوى ٢٦ أوجد القيمة العظمى المحلية للدالة .

----

(١٠) أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة د(س) = $س^٣$ و محور السينات و المستقيمين س = –٢ ، س = ٢ .

----

(١١) إذا كانت د :]-∞ , ١] ← ح حيث د(س) = $س^٣$ – ٤س إوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة و محور السينات و تقع أعلى محور السينات

----

(١٢) أوجد مساحة المنطقة المستوية المحددة بالمنحنى ص = ٣ + ٢س – $س^٢$ و المستقيمات س = -١ ، س = ٤ ، ص = ٠

----

(١٣) إوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالتين د(س) = $س^٣$ – ٣ $س^٢$ + ٥ ، ر(س) = س + ٢ .

----

(١٤) إذا كانت تكلفة المتر المربع من أرضية ممرات الفندق بالجرانيت ٤٠٠ جنيه و تم تغطية ٥ ممرات متطابقة بالجرانيت مساحة كل منها محدودة بمنحنى الدالة د و المستقيمين س = ٠ ، ص = ٠ حيث د(س) = ١٢ – $\frac{١}{٣}$ $س^٢$ أوجد تكلفة تغطية الممرات الخمسة.

(١٥) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين $ص = \sqrt{س}$ ، $ص = س^٢$ دورة كاملة حول محور السينات.

---

(١٦) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين $ص = ٤ - س^٢$ ، $٢س + ص = ٤$ دورة كاملة حول محور الصادات.

---

(١٧) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين $\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ و محور السينات دورة كاملة حول محور السينات. حيث أ ، ب ثابتان.

إجابات أسئلة الإختيار

الإشتقاق :

(١) ج	(٢) ج	(٣) د	(٤) ج	(٥) ب
(٦) ب	(٧) ب	(٨) ب	(٩) ب	(١٠) د
(١١) أ	(١٢) ج	(١٣) د	(١٤) ب	(١٥) أ
(١٦) أ	(١٧) ب	(١٨) ج	(١٩) أ	(٢٠) أ

النهايات :

(١) أ	(٢) ج	(٣) ب	(٤) د	(٥) ب
(٦) ج	(٧) د	(٨) د		

تطبيقات هندسية :

(١) ب	(٢) ج	(٣) ب	(٤) ب	(٥) ب
(٦) أ	(٧) د	(٨) ب	(٩) د	(١٠) ج

معدلات زمنية :

(١) أ	(٢) أ	(٣) ج	(٤) ب	(٥) د
(٦) ج	(٧) أ	(٨) ب	(٩) أ	

سلوك الدالة :

(١) أ	(٢) أ	(٣) ب	(٤) ب	(٥) ب
(٦) ج	(٧) د	(٨) د	(٩) أ	(١٠) ب
(١١) ج	(١٢) ب	(١٣) ج	(١٤) ج	(١٥) د

التكامل :

أولاً

(١) أ	(٢) ج	(٣) د	(٤) ب	(٥) ب
(٦) ب	(٧) ج	(٨) ج	(٩) ب	(١٠) د
(١١) د	(١٢) ب	(١٣) ب	(١٤) ب	(١٥) ج
(١٦) د	(١٧) أ	(١٨) ج	(١٩) ب	(٢٠) ج

ثانياً

(١) د	(٢) د	(٣) أ	(٤) ب	(٥) ج
(٦) ج	(٧) د	(٨) د	(٩) ج	(١٠) أ

الأشتقاق:

(١) ص = س^{٢} قا$\left(\frac{١}{س}\right)$ $\Leftarrow$ $\frac{دص}{دس}$ = ٢س قا$\left(\frac{١}{س}\right)$ + $\left(\frac{-١}{س^{٢}}\right.$قا$\left(\frac{١}{س}\right)$ظا$\left.\left(\frac{١}{س}\right)\right)$س^{٢}

$\frac{دص}{دس}$ = ٢س قا$\left(\frac{١}{س}\right)$ + $\left(\frac{-١}{\cancel{س^{٢}}}\right)$ × $\cancel{س^{٢}}$ × قا$\left(\frac{١}{س}\right)$ظا$\left(\frac{١}{س}\right)$

$\frac{دص}{دس}$ = ٢س قا$\left(\frac{١}{س}\right)$ − قا$\left(\frac{١}{س}\right)$ظا$\left(\frac{١}{س}\right)$

---

(٢) ص = ٢ظتاس + $\sqrt{٢}$ قاس $\Leftarrow$ $\frac{دص}{دس}$ = −٢قتا^{٢}س + $\sqrt{٢}$ قاس ظاس

$\left[\frac{دص}{دس}\right]_{س=\frac{\pi}{٤}}$ = −٢قتا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ + $\sqrt{٢}$ × قا$\frac{\pi}{٤}$ × ظا$\frac{\pi}{٤}$

$\left[\frac{دص}{دس}\right]_{س=\frac{\pi}{٤}}$ = $\frac{-٢}{\left(جا\frac{\pi}{٤}\right)^{٢}}$ + $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{جتا\frac{\pi}{٤}}$ × ظا$\frac{\pi}{٤}$

$\left[\frac{دص}{دس}\right]_{س=\frac{\pi}{٤}}$ = −٤ + ٢ = −٢

---

(٣) ∵ ص = جتا$(٢\pi\theta)$ $\Leftarrow$ $\frac{دص}{د\theta}$ = −٢πجا$(٢\pi\theta)$

∴ س = جا$(٢\pi\theta)$ $\Leftarrow$ $\frac{دس}{د\theta}$ = ٢πجتا$(٢\pi\theta)$

∵ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{دص}{د\theta}$ × $\frac{د\theta}{دس}$ $\Leftarrow$ $\frac{دص}{دس}$ = −$\cancel{٢\pi}$جا$(٢\pi\theta)$ × $\frac{١}{\cancel{٢\pi}جتا(٢\pi\theta)}$

∴ $\frac{دص}{دس}$ = − $\frac{جا(٢\pi\theta)}{جتا(٢\pi\theta)}$ $\Leftarrow$ $\frac{دص}{دس}$ = −ظا$(٢\pi\theta)$

∴ $\left[\frac{دص}{دس}\right]_{\theta=\frac{١}{٦}}$ = −ظا$\left(٢\pi\times\frac{١}{٦}\right)$ $\Leftarrow$ $\left[\frac{دص}{دس}\right]_{\theta=\frac{١}{٦}}$ = −ظا$\left(\frac{\pi}{٣}\right)$ = − $\sqrt{٣}$

حل آخر:

∵ $\left.\begin{array}{l} ص = جتا(٢\pi\theta) \\ س = جا(٢\pi\theta)\end{array}\right\}$ $\Leftarrow$ $\left.\begin{array}{l} ص^{٢} = جتا^{٢}(٢\pi\theta) \\ س^{٢} = جا^{٢}(٢\pi\theta)\end{array}\right\}$ بالجمع

∴ س^{٢} + ص^{٢} = جا$^{٢}(٢\pi\theta)$ + جتا$^{٢}(٢\pi\theta)$

∴ س^{٢} + ص^{٢} = ١ $\Leftarrow$ ٢س + ٢ص$\frac{دص}{دس}$ = ٠

∴ س + ص$\frac{دص}{دس}$ = ٠ $\Leftarrow$ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-س}{ص}$

∴ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-جا(٢\pi\theta)}{جتا(٢\pi\theta)}$ $\Leftarrow$ $\frac{دص}{دس}$ = −ظا$(٢\pi\theta)$

∴ $\left[\frac{دص}{دس}\right]_{\theta=\frac{١}{٦}}$ = −ظا$\left(٢\pi\times\frac{١}{٦}\right)$ $\Leftarrow$ $\left[\frac{دص}{دس}\right]_{\theta=\frac{١}{٦}}$ = −ظا$\left(\frac{\pi}{٣}\right)$ = − $\sqrt{٣}$

---

(٤) ∵ س = ٢ن^{٣} − ٥ن^{٢} + ٤ن + ٩ $\Leftarrow$ $\frac{دس}{دن}$ = ٦ن^{٢} − ١٠ن + ٤

$\because\ \text{ص} = 2\text{ن}^2 + \text{ن} - 5 \quad \Leftarrow \quad \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = 4\text{ن} + 1$

$\because\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \times \frac{\text{ءن}}{\text{ءس}} \quad \Leftarrow \quad \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{4\text{ن} + 1}{6\text{ن}^2 - 10\text{ن} + 4}$

(أ) $\because$ المماس رأسى $\Leftarrow$ ميل المماس غير معرف أى أن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ غير معرف

$\therefore\ 6\text{ن}^2 - 10\text{ن} + 4 = 0 \quad \Leftarrow \quad 3\text{ن}^2 - 5\text{ن} + 2 = 0$

$\therefore\ (3\text{ن} - 2)(\text{ن} - 1) = 0 \quad \Leftarrow \quad \boxed{\text{ن} = \frac{2}{3}}\ ،\ \boxed{\text{ن} = 1}$

(ب) $\because$ المماس أفقى $\Leftarrow$ ميل المماس يساوى صفر أى أن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$

$\therefore\ 4\text{ن} + 1 = 0 \quad \Leftarrow \quad \boxed{\text{ن} = \frac{-1}{4}}$

---

(٥) نفرض أن $\text{ص} = \text{س} - \text{جاس}$ ، $\text{ع} = 1 - \text{جتاس}$ $\Leftarrow$ المطلوب هو $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ عند $\text{س} = \frac{\pi}{3}$

$\because\ \text{ص} = \text{س} - \text{جاس} \quad \Leftarrow \quad \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 1 - \text{جتاس}$

$\because\ \text{ع} = 1 - \text{جتاس} \quad \Leftarrow \quad \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \text{جاس}$

$\because\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءع}} \quad \Leftarrow \quad \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{1 - \text{جتاس}}{\text{جاس}}$

$\therefore\ \left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}\right]_{\text{س}=\frac{\pi}{3}} = \frac{1 - \text{جتا}\frac{\pi}{3}}{\text{جا}\frac{\pi}{3}} \quad \Leftarrow \quad \left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}\right]_{\text{س}=\frac{\pi}{3}} = \frac{1 - \text{جتا}\frac{\pi}{3}}{\text{جا}\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

---

(٦) $\because\ \text{ص} = \sqrt{2\text{س} + 5} \quad \Leftarrow \quad \text{ص}^2 = 2\text{س} + 5$

$\therefore\ 2\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2 \quad \Leftarrow \quad \text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 1$ .... (١) بالإشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{ص}\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = 0 \quad \Leftarrow \quad \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^2 + \text{ص}\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = 0$ بالإشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore\ 2\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \times \frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} + \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \times \frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} + \text{ص}\frac{\text{ء}^3\text{ص}}{\text{ءس}^3} = 0$

$\therefore\ 3\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \times \frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} + \text{ص}\frac{\text{ء}^3\text{ص}}{\text{ءس}^3} = 0$ بالتعويض من (١) عن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{ص}}$

$\therefore\ 3 \times \frac{1}{\text{ص}} \times \frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} + \text{ص}\frac{\text{ء}^3\text{ص}}{\text{ءس}^3} = 0 \quad \Leftarrow \quad 3\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} + \text{ص}^2\frac{\text{ء}^3\text{ص}}{\text{ءس}^3} = 0\ ،\ \because\ \text{ص}^2 = 2\text{س} + 5$

$\therefore\ (2\text{س} + 5)\frac{\text{ء}^3\text{ص}}{\text{ءس}^3} + 3\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = 0$

---

(٧) $\because\ \text{ص}^2 + \text{س}^2\text{ص}^2 = 8$ بالإشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore\ 2\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + 2\text{س}\,\text{ص}^2 + \text{س}^2 \times 2\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$

$2\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + 2\text{س}\,\text{ص}^2 + 2\text{س}^2\,\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$ بالقسمة ÷ ٢ ص

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{س}\,\text{ص} + \text{س}^2\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$ بالإشتقاق بالنسبة لـ س

$\frac{ء^{2}ص}{ءس^{2}}$ + س $\frac{ءص}{ءس}$ + ص + ٢س $\frac{ءص}{ءس}$ + س^{2} $\frac{ء^{2}ص}{ءس^{2}}$ = ٠

(١ + س^{2}) $\frac{ء^{2}ص}{ءس^{2}}$ + ٣س $\frac{ءص}{ءس}$ + ص = ٠

---

(٨) ∵ ص^{2} + م س^{3} – ب س = ج　　　بالإشتقاق بالنسبة لـ س

∴ ٢ص صَ + ٣م س^{2} – ب = ٠　　　بالإشتقاق بالنسبة لـ س

∴ ٢صَ × صَ + ٢ص × صً + ٦ م س = ٠　　　بالقسمة ÷ ٢

∴ ص صً + (صَ)^{2} + ٣ م س = ٠

---

(٩) ∵ جا ٢س – جتا ٣ص = ٠　　......(١)　　بالإشتقاق بالنسبة لـ س

∴ ٢جتا ٢س + ٣صَ جا ٣ص = ٠　　بالإشتقاق بالنسبة لـ س

∴ – ٤ جا ٢س + ٣صً جا ٣ص + ٩صَ^{2}جتا ٣ص = ٠　　بالقسمة ÷ جتا ٣ص

∴ –٤× $\frac{جا ٢س}{جتا ٣ص}$ + ٣ صً × $\frac{جا ٣ص}{جتا ٣ص}$ + ٩ صَ^{2} × $\frac{جتا٣ص}{جتا٣ص}$ = ٠　　من (١) جا ٢س = جتا ٣ص

∴ ٣ $\frac{ء^{2}ص}{ءس^{2}}$ ظا ٣ ص + ٩ ($\frac{ءص}{ءس}$)^{2} – ٤ = ٠

---

(١٠) ∵ ص = $\frac{١}{س}$　...(١) بالإشتقاق بالنسبة لـ س

⟸ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-١}{س^{2}}$ ...(٢) بالإشتقاق بالنسبة لـ س

⟸ $\frac{ء^{2}ص}{ءس^{2}}$ = $\frac{٢}{س^{3}}$　...(٣)

الطرف الأيمن للمطلوب = $\frac{ء^{2}ص}{ءس^{2}}$ + ٣ ص $\frac{ءص}{ءس}$ + ص^{3}　　بالتعويض من (١) ، (٢) ،(٣)

الطرف الأيمن للمطلوب = $\frac{٢}{س^{3}}$ + ٣ × $\frac{١}{س}$ × $\frac{-١}{س^{2}}$ + ($\frac{١}{س}$)^{3}

الطرف الأيمن للمطلوب = $\frac{٢}{س^{3}}$ – $\frac{٣}{س^{3}}$ + $\frac{١}{س^{3}}$ = ٠

---

(١١) ∵ ص = س^{3} + ١　　∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣س^{2}　..........(١)

∵ ع = س^{2} + ٣　　∴ $\frac{ءع}{ءس}$ = ٢س　..........(٢)

∵ $\frac{ءع}{ءص}$ = $\frac{ءع}{ءس}$ × $\frac{ءس}{ءص}$　　بالتعويض من (١) ، (٢)

$\frac{ءع}{ءص}$ = ٢ س × $\frac{١}{٣ س^{2}}$　⟸　$\frac{ءع}{ءص}$ = $\frac{٢}{٣}$ س$^{-١}$　　بالإشتقاق بالنسبة لـ ص

$\frac{ء^{2}ع}{ءص^{2}}$ = – $\frac{٢}{٣}$ س$^{-٢}$ × $\frac{ءس}{ءص}$　　بالتعويض من (١)

$\frac{ء^{2}ع}{ءص^{2}}$ = – $\frac{٢}{٣}$ س$^{-٢}$ × $\frac{١}{٣ س^{2}}$　⟸　$\frac{ء^{2}ع}{ءص^{2}}$ = – $\frac{٢}{٩}$ × س$^{-٤}$　　بالتعويض عن س = ٢

$\frac{ء^{2}ع}{ءص^{2}}$ = – $\frac{٢}{٩}$ × $\frac{١}{١٦}$ = – $\frac{١}{٧٢}$

(١٢) ∵ $س^٢ = ٢ن - ٣$ ∴ $ن = \frac{١}{٢}س^٢ + \frac{٣}{٢}$ ....(١)

∵ $ص = ٢ن^٢ - ١$ بالتعويض من (١)

∴ $ص = ٢\left(\frac{١}{٢}س^٢ + \frac{٣}{٢}\right)^٢ - ١$ بالإشتقاق بالنسبة لـ س

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٤\left(\frac{١}{٢}س^٢ + \frac{٣}{٢}\right) \times س$ ⟸ $\frac{ءص}{ءس} = ٢س^٣ + ٦س$ ....(٢)

بالإشتقاق بالنسبة لـ س $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٦س^٢ + ٦$ ....(٣)

الطرف الأيمن للمطلوب $= ٣\frac{ءص}{ءس} - س\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} - ١٢س$ بالتعويض من (٢) ، (٣)

الطرق الأيمن للمطلوب $= ٣(٢س^٣ + ٦س) - س(٦س^٢ + ٦) - ١٢س$

الطرق الأيمن للمطلوب $= ٦س^٣ + ١٨س - ٦س^٣ - ٦س - ١٢س = ٠$

---

(١٣) ∵ $س = جا٢ن$ ⟸ $\frac{ءس}{ءن} = ٢جتا٢ن$

∵ $ص = جتا٢ن$ ⟸ $\frac{ءص}{ءن} = -٢جا٢ن$

∵ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \times \frac{ءن}{ءس}$ ⟸ $\frac{ءص}{ءس} = ٢جا٢ن \times \frac{١}{-٢جتا٢ن}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = -\frac{جا٢ن}{جتا٢ن}$ ⟸ $\frac{ءص}{ءس} = -ظا٢ن$ بالإشتقاق بالنسبة لـ **س**

∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = -٢ \times قا^٢ ٢ن \times \frac{ءن}{ءس}$ ⟸ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = -٢ \times \frac{١}{٢جتا٢ن} \times قا^٢ ٢ن$

∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = \frac{-١}{جتا٢ن} \times \frac{١}{جتا^٢ ٢ن}$ ⟸ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = \frac{-١}{جتا^٣ ٢ن}$

∴ $\left[\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}\right]_{ن=\frac{\pi}{٢}} = \frac{-١}{\left(جتا٢ \times \frac{\pi}{٢}\right)^٣} = ١$

---

(١٤) ∵ $ص = ظا^٢ س$ ⟸ $\frac{ءص}{ءس} = ٢ظاس قا^٢ س$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٢ظاس\left(١ + ظا^٢ س\right)$ ⟸ $\frac{ءص}{ءس} = ٢ظاس\left(١ + ص\right)$ بالإشتقاق مرة أخرى

∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٢قا^٢ س\left(١ + ص\right) + ٢\frac{ءص}{ءس}ظاس$ ⟸ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٢قا^٢ س\left(١ + ص\right) + ٤ظا^٢ س\left(١ + ص\right)$

∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = \left(١ + ص\right)\left(٢قا^٢ س + ٤ظا^٢ س\right)$ ⟸ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = \left(١ + ص\right)\left(٢ + ٢ظا^٢ س + ٤ظا^٢ س\right)$

∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = \left(١ + ص\right)\left(٢ + ٦ظا^٢ س\right)$ ⟸ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٢\left(١ + ص\right)\left(١ + ٣ص\right)$

---

(١٥) ∵ $ص = سه^{س}$ ⟸ $\frac{ءص}{ءس} = سه^{س} + ه^{س}$ ⟸ $\frac{ءص}{ءس} = ه^{س}\left(س + ١\right)$

∴ $س\frac{ءص}{ءس} = سه^{س}\left(س + ١\right)$ ⟸ $س\frac{ءص}{ءس} = ص\left(س + ١\right)$

تطبيقات هندسية

(١) لإيجاد نقطة التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠ فى معادلة المنحنى

∵ $\text{س}^{2} + \text{ص}^{2} - 6\text{ص} - 16 = 0$ ، س = ٠

∴ $0 + \text{ص}^{2} - 6\text{ص} - 16 = 0 \Leftarrow (\text{ص} - 8)(\text{ص} + 2) = 0$

∴ ص = ٨ أو ص = −٢ مرفض ؟ ⟸ النقطة هى $(0 , 8)$

نوجد الميل

∵ $\text{س}^{2} + \text{ص}^{2} - 6\text{ص} - 16 = 0$ بالإشتقاق بالنسبة لـ س

∴ $2\text{س} + 2\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - 6\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 0$ بوضع س = ٠ ، ص = ٨ ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 0$

∴ المماس // محور السينات و بالتالى العمودى // محور الصادات.

معادلة المماس	معادلة العمودى
$\boxed{\text{ص} = 8}$	$\boxed{\text{س} = 0}$

---

(٢) أولاً : نوجد نقطة التماس و ذلك بالتعويض عن قيمة س فى معادلة المنحنى لإيجاد قيمة ص

∵ س = ص قاس ، $\text{س} = \pi$ ⟸ $\pi = \text{ص} \times \text{قا}\,\pi$

∴ $\text{ص} = -\pi$ ⟸ نقطة التماس هى $(\pi , -\pi)$

ثانياً : نوجد ميل المماس

∵ س = ص قاس بالإشتقاق بالنسبة لـ **س** ثم التعويض عن س ، ص

∴ $1 = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}\text{قاس} + \text{ص قاس ظاس}$ ⟸ $1 = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times \text{قا}\,\pi + (-\pi) \times \text{قا}\,\pi \times \text{ظا}\,\pi$

∴ $1 = -\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + 0$ ⟸ $\boxed{\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -1}$

معادلة المماس	معادلة العمودى
$\text{ص} - (-\pi) = -1 \times (\text{س} - \pi)$	$\text{ص} - (-\pi) = 1 \times (\text{س} - \pi)$
$\text{ص} + \pi = -\text{س} + \pi$	$\text{ص} + \pi = \text{س} - \pi$
$\boxed{\text{ص} + \text{س} = 0}$	$\boxed{\text{س} - \text{ص} - 2\pi = 0}$

---

(٣) أولاً : نوجد نقطة التماس و ذلك بالتعويض عن قيمة س فى معادلتى المنحنى لإيجاد قيمة ص

∵ $\left.\begin{array}{l}\text{س} = \text{قا}^{2}\theta - 1 \\ \text{ص} = \text{ظا}\,\theta\end{array}\right\}$ ⟸ $\left.\begin{array}{l}\text{س} = \left(\text{قا}\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)^{2} - 1 \\ \text{ص} = \text{ظا}\left(\frac{-\pi}{4}\right)\end{array}\right\}$

∴ $\left.\begin{array}{l}\text{س} = 1 \\ \text{ص} = -1\end{array}\right\}$ ⟸ نقطة التماس هى $(1 , -1)$

ثانياً : نوجد ميل المماس

$\because$ س $=$ قا$^{٢}\theta - ١$ ، ص $=$ ظاθ $\Leftarrow$ $\frac{ءص}{ء\theta} = ٢$قاθ(قاθظاθ) $= ٢$قا$^{٢}\theta$ظاθ ، $\frac{ءص}{ء\theta} =$ قا$^{٢}\theta$

$\because$ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ء\theta} \times \frac{ء\theta}{ءس}$ $\Leftarrow$ $\frac{ءص}{ءس} = \cancel{قا^{٢}\theta} \times \frac{١}{٢\cancel{قا^{٢}\theta}ظا\theta}$

$\therefore$ $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{س=\frac{-\pi}{٤}} = \frac{١}{ظا(\frac{-\pi}{٤})}$ $\Leftarrow$ $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{س=\frac{-\pi}{٤}} = -١$

معادلة المماس :

ص $+ ١ = -($س $- ١)$ $\Leftarrow$ $\boxed{س + ص = ٠}$

معادلة العمودى :

ص $+ ١ =$ س $- ١$ $\Leftarrow$ $\boxed{س - ص - ٢ = ٠}$

---

(٤) لإثبات أن منحنيان متماسان نبرهن أنهما متقاطعان فى نقطة ، ميلاهما عند هذه النقطة متساويان.

(أولاً) نوجد نقطة التقاطع و ذالك بحل المعادلتين معاَ كما يلى

$\because$ ص $=$ س^{٢} $-$ س $+ ٢$ ...(١) ، ص $= ٣$س $-$ س^{٢} ...(٢)

$\therefore$ س^{٢} $-$ س $+ ٢ = ٣$س $-$ س^{٢} $\Leftarrow$ ٢س^{٢} $- ٤$س $+ ٢ = ٠$ بالقسمة ÷ ٢

$\therefore$ س^{٢} $- ٢$س $+ ١ = ٠$ $\Leftarrow$ (س $- ١)^{٢} = ٠$

$\therefore$ $\boxed{س = ١}$ بالتعويض فى أى من المعادلتين (١) أو (٢) و لتكن المعادلة (١)

$\therefore$ ص $= ١^{٢} - ١ + ٢ = ٢$ $\Leftarrow$ النقطة هى $\boxed{(١ , ٢)}$

المنحنى الأول

$\because$ ص $=$ س^{٢} $-$ س $+ ٢$

$\therefore$ $\frac{ءص}{ءس} = ٢$س $- ١$

$\therefore$ $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{س=١} = ٢ \times ١ - ١ = ١$

$\therefore$ م$_{١} = ١$

المنحنى الثانى

$\because$ ص $= ٣$س $-$ س^{٢}

$\therefore$ $\frac{ءص}{ءس} = ٣ - ٢$س

$\therefore$ $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{س=١} = ٣ - ٢ \times ١ = ١$

، م$_{٢} = ١$

$\because$ المنحنيان متقاطعان فى $(١ , ٢)$ ، م$_{١}$ $=$ م$_{٢}$ $\therefore$ المنحنيان متماسان.

معادلة المماس المشترك لهما:

ص $- ٢ =$ س $- ١$ $\Leftarrow$ $\boxed{س - ص + ١ = ٠}$

---

(٥) نوجد نقطة التقاطع بحل المعادلتين معاَ كما يلى

$\because$ س ص $= ٢$ ...(١) ، س^{٢} $-$ ص^{٢} $= ٣$ ...(٢)

من المعادلة (١) $ص = \frac{٢}{س}$ ...(٣) بالتعويض فى المعادلة (٢)

∴ $س^{٢} - \left(\frac{٢}{س}\right)^{٢} = ٣$ ⟸ $س^{٢} - \frac{٤}{س^{٢}} = ٣$ بالضرب × $س^{٢}$

∴ $س^{٤} - ٤ = ٣س^{٢}$ ⟸ $س^{٤} - ٣س^{٢} - ٤ = ٠$

∴ $(س^{٢} - ٤)(س^{٢} + ١) = ٠$ ⟸ $س^{٢} = ٤$ ، $\cancel{س^{٢} = -١}$ غير ممكن

∴ $س = ٢$ أو $س = -٢$ بالتعويض فى (٣) ⟸ $ص = ١$ أو $ص = -١$

∴ النقط هى $(٢ , ١)$ ، $(-٢ , -١)$

لكى نبرهن أن المنحنيان متقاطعان على التعامد نبرهن أن حاصل ضرب ميلاهما = - ١

المنحنى الأول

∵ $سص = ٢$ بالإشتقاق بانسبة لـ س

∴ $ص + س \frac{ءص}{ءس} = ٠$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-ص}{س}$

∴ $م_{١} = \frac{-ص}{س}$

المنحنى الثانى

∵ $س^{٢} - ص^{٢} = ٣$ بالإشتقاق بالنسبة لـ س

∴ $٢س - ٢ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{س}{ص}$

∴ $م_{٢} = \frac{ص}{س}$

∵ $م_{١} \times م_{٢} = \frac{-ص}{س} \times \frac{ص}{س} = -١$

∴ المنحنيان متقاطعان على التعامد عند كل من النقطتين .

----

(٦) ❋حتى يكون للمنحنيان مماس مشترك عند النقطة $(-١ , ٢)$ لابد أن تحقق النقطة كل من المنحنيين

∴ $٢ = أ \times (-١)^{٣} + ب \times (-١)$ ⟸ $\boxed{-أ-ب = ٢}$ ... (١)

، $٢ = جـ(-١)^{٢} - (-١)$ ⟸ $\boxed{جـ = ١}$

❋ حتى يكون للمنحنيان مماس مشترك عند النقطة $(-١ , ٢)$ يجب أن يكون ميل المماس للمنحنى الأول = ميل المماس للمنحنى الثانى عند هذه النقطة.

∵ $ص = أس^{٣} + بس$ ، $ص = جـس^{٢} - س$ بالإشتقاق بالنسبة لـ س

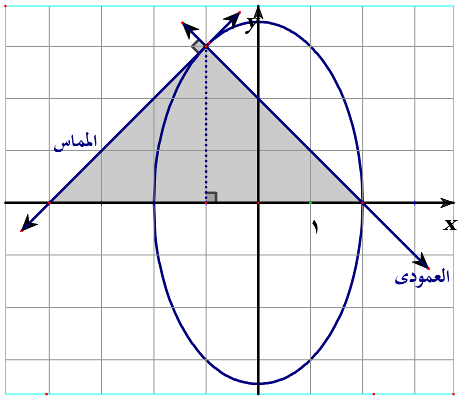
∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٣أس^{٢} + ب$ ، $\frac{ءص}{ءس} = ٢جـس - ١$ بالتعويض عن $س = -١$، $جـ = ١$

∴ $م_{١} = ٣أ + ب$ ، $م_{٢} = -٣$ ⟸ $\boxed{٣أ + ب = -٣}$ ... (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) ⟸ $\boxed{أ = \frac{-١}{٢}}$ ، $\boxed{أ = \frac{-٣}{٢}}$

----

(٧) (أولاً) نوجد معادلة كل من المماس و العمودى :



∵ ٣س^{٢} + ص^{٢} = ١٢ ⇐ ٦س + ٢ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

∴ ٦ × (−١) + ٢ × ٣ × $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١ " ميل المماس"

معادلة { المماس : ص − ٣ = س + ١
العمودى : ص − ٣ = −(س + ١) }

(ثانياً)نوجد تقاطع كل منهم مع محور السينات بوضع ص = ٠

∴ { ٠ − ٣ = س + ١ ، ٠ − ٣ = −(س + ١) } ⇐ { س = −٤ ، س = ٢ }

∴ طول قاعدة المثلث = |−٤ − ٢| = ٦ وحدة طول ، طول الإرتفاع = ٣ وحدة طول

∴ مساحة ∆ = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٣ = ٩ وحدة طول مربعة.

---

(٨) ∵ ٢ص^{٢} − ٨ص + س = ٠ ....(١) بالإشتقاق بالنسبة لـ س

∴ ٤ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ − ٨ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ١ = ٠ ⇐ ٤ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (ص − ٢) = −١

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{-١}{٤(\text{ص} - ٢)}$ ∵ المماس // محور الصادات

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ غير معرفه ∴ ٤ (ص − ٢) = ٠ ⇐ ص = ٢ بالتعويض فى (١)

∴ ٢×٤ − ٨×٢ + س = ٠ ∴ س = ٨ ∴ النقطة هى (٨ ، ٢)

---

(٩) نفرض أن النقطة المطلوبه هى (أ ، ب)

∵ (أ ، ب) ∈ للمنحنى ∴ تحقق معادلته أى أن $\boxed{\text{ب} = \text{أ}^{٢} - \text{أ}}$ ..... (١)

نوجد معادلة المماس بدلالة أ ، ب

∵ ص = س^{٢} − س ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢س − ١ ميل المماس = ٢أ − ١

معادلة المماس : ص − ب = (٢أ − ١)(س − أ)

∵ النقطة (١ ، −٤) ∈ المماس ∴ تحقق معادلته

∴ −٤ − ب = (٢أ − ١)(١ − أ) ⇐ −٤ − ب = −٢أ^{٢} + ٣أ − ١

∴ $\boxed{\text{ب} = ٢\text{أ}^{٢} - ٣\text{أ} - ٣}$ (٢) ..... بالتعويض من (١) عن قيمة ب

٢أ^{٢} − ٣أ − ٣ = أ^{٢} − أ ⇐ أ^{٢} − ٢أ − ٣ = ٠

(أ − ٣)(أ + ١) = ٠ ⇐ أ = ٣ أو أ = −١ بالتعويض فى (١)

ب = ٦ أو ب = ٢ ⇐ النقط هى (٣، ٦) أو (−١ ، ٢)

---

(١٠) ∵ ٤ص + س^{٢} = ٠ ⟸ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $-\frac{١}{٢}$ س

∵ Δ متساوى الأضلاع ⟸ هـ = ٦٠° و هـ = ١٢٠°

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\sqrt{٣}$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $-\sqrt{٣}$ ⟸ $-\frac{١}{٢}$ س = $\sqrt{٣}$ ، $-\frac{١}{٢}$ س = $-\sqrt{٣}$

∴ س = $-٢\sqrt{٣}$ ، س = $٢\sqrt{٣}$ ⟸ ص = − ٣

نوجد معادلة المماس عند إحدى النقطتين ($-٢\sqrt{٣}$ ، − ٣) أو ($٢\sqrt{٣}$ ، − ٣) ثم نوجد نقطة تقاطعه مع محور الصادات

ص + ٣ = $\sqrt{٣}$ (س + $٢\sqrt{٣}$) ⟸ ص + ٣ = $\sqrt{٣}$ (٠ + $٢\sqrt{٣}$) ⟸ النقطة هى (٠ ، ٢)

المعدلات الزمنية:

(١) نفرض أن حجم الغاز ع ، و طول نصف قطر البالون نق : فيكون : $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ = −٢٠ سم^{٣}/ث ، نق = ١٠ سم

المطلوب : $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$ = ؟؟؟ ، $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ = ؟؟؟ حيث م مساحة سطح البالون.

∵ ع = $\frac{٤}{٣}\pi$ نق^{٣} ⟸ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ = ٤π نق^{٢} $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$ ⟸ -٢٠ = ٤π × (١٠)^{٢} × $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$

∴ $\boxed{\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}} = \frac{-١}{٢٠\pi}}$ سم/ث ∵ م = ٤π نق^{٢} ⟸ $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ = ٨π نق $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$ ⟸

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ = ٨π × ١٠ × $\frac{-١}{٢٠\pi}$ = −٤ سم^{٢}/ث

---

(٢) نفرض أن طول حرف المكعب = س فيكون $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = ٠,٠٢ سم/د ، $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ = ٠,٧٢سم^{٢}/د حيث م مساحة سطحة

المطلوب : س ، $\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}}$ حيث ح حجم المكعب

∵ م = ٦س^{٢} ⟸ $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ = ١٢س $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ ⟸ ٠,٧٢ = ١٢س × ٠,٠٢

∴ س = ٣ سم ، ∵ ح = س^{٣} ⟸ $\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}}$ = ٣س^{٢} $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

∴ $\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}}$ = ٣ × ٣^{٢} × ٠,٠٢ = ٠,٥٤ سم^{٣}/د

---

(٣) نفرض أن أبعاد متوازى المستطيلات هى س ، س ، ص حيث $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = ١سم/د ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = -٢ سم/د

، س. = ٥ ، ص. = ٢٠ فى أي لحظة زمنية ن : تكون س = ٥+ن ، ص = ٢٠-٢ن

∵ الحجم ع = س^{٢} ص ⟸ ع = (٥+ن)^{٢} (٢٠-٢ن)

∴ ع = ٢(٥+ن)^{٢} (١٠-ن) ⟸ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ = ٤(٥+ن)(١٠-ن) − ٢(٥+ن)^{٢}

∴ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ = ٢(٥+ن)[٢(١٠-ن) − (٥+ن)] ⟸ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ = ٢(٥+ن)(١٥-٣ن)

عندما ن = ٠ ⟸ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ = ٢ × ٥ × ١٥ = ١٥٠ سم^{٣}/د

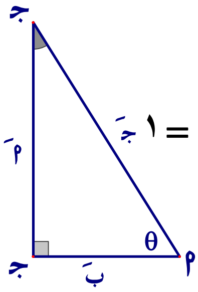
يتوقف معدل التغير عندما $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ = ٠ ⟸ ٢(٥+ن)(١٥-٣ن) = ٠ ⟸ ن = ٣ د

---

(٤) الهرم الرباعى المنتظم قاعدته مربعة الشكل : نفرض أن طول ضلع قاعدته " س " فيكون إرتفاعه " س "

∵ حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الإرتفاع ⇐ ع = $\frac{1}{3}$ س^{2} × س = $\frac{1}{3}$ س^{3}

∴ $\frac{دع}{دن}$ = س^{2} $\frac{دس}{دن}$ ⇐ ١ = س^{2} × ٠,٠١ ⇐ س = ١٠سم



(٥) ∵ المساحة = ٢٤ ⇐ $\frac{1}{2}$ أَ بَ = ٢٤

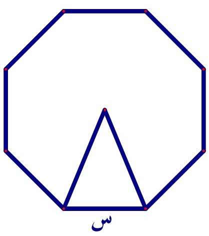
∴ أَ بَ = ٤٨ ، عندما بَ = ٨ ⇐ أَ = ٦ ، ظا θ = $\frac{3}{4}$ ، قا θ = $\frac{5}{4}$ ، $\frac{دبَ}{دن}$ = ١ جـَ

∵ أَ بَ = ٢٤ ⇐ أَ × $\frac{دبَ}{دن}$ + بَ × $\frac{دأَ}{دن}$ = ٠

∴ ٦ × ١ + ٨ × $\frac{دأَ}{دن}$ = ٠ ⇐ $\boxed{\frac{دأَ}{دن} = \frac{-3}{4}}$

∵ ظا θ = $\frac{أَ}{بَ}$ ⇐ بَ ظا θ = أَ ⇐ بَ $\frac{دθ}{دن}$ قا^{2} θ + $\frac{دبَ}{دن}$ ظا θ = $\frac{دأَ}{دن}$

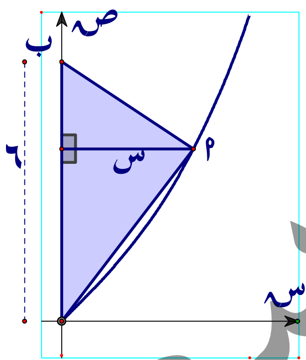
∴ ٨ × $\frac{دθ}{دن}$ × $\left(\frac{5}{4}\right)^{2}$ + ١ × $\frac{3}{4}$ = $\frac{-3}{4}$ ⇐ $\boxed{\frac{دθ}{دن} = \frac{-3}{25}}$



(٦) مساحة المضلع المنتظم م = $\frac{1}{4}$ ن س^{2} ظتا $\frac{180}{ن}$ حيث ن عدد أضلاعه ، س طول ضلعه

مساحة المثمن م = $\frac{1}{4}$ × ٨ س^{2} ظتا $\frac{180}{8}$ ⇐ م = ٢ س^{2} ظتا $\frac{180}{8}$

$\frac{دم}{دن}$ = ٤ س × $\frac{دس}{دن}$ × ظتا $\frac{180}{8}$ ⇐ $\frac{دم}{دن}$ = ٤ × ١٠ × ٠,٢ × ظتا $\frac{180}{8}$ = ١٩,٣



(٧) ∵ ص = س^{3} + س ⇐ $\frac{دص}{دن}$ = ٣ س^{2} $\frac{دس}{دن}$ + $\frac{دس}{دن}$

∵ $\frac{دص}{دن}$ = ٢ ، س = ٣ ⇐ ٢ = ٣ × ٩ × $\frac{دس}{دن}$ + $\frac{دس}{دن}$

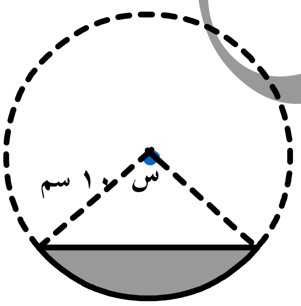
∴ ٢ = ٢٨ $\frac{دس}{دن}$ ⇐ $\frac{دس}{دن}$ = $\frac{1}{28}$

∵ مساحة Δ م = $\frac{1}{2}$ × ٦ × س ⇐ م = ٣ س

∴ $\frac{دم}{دن}$ = ٣ $\frac{دس}{دن}$ ⇐ $\frac{دم}{دن}$ = ٣ × $\frac{1}{28}$ = $\frac{3}{28}$

---

(٨) نق = ١٠سم ، $\frac{دس}{دن}$ = ٣ ءُ/د ، س° = ٦٠°



∵ مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2}$ نق^{2} (سء − جا س°)

∴ م = $\frac{1}{2}$ × ١٠٠ × (سء − جا س°)

∴ م = ٥٠ (سء − جا س°) بالإشتقاق بالنسبة للزمن ن

∴ $\frac{دم}{دن}$ = ٥٠ × ($\frac{دس}{دن}$ − $\frac{دس}{دن}$ × جتا س°) بالتعويض عن س° ، $\frac{دس}{دن}$

∴ $\frac{دم}{دن}$ = ٥٠ × (٣ − ٣ × جتا ٦٠)

∴ $\frac{دم}{دن}$ = ٧٥ سم^{2}/د

(٩) نفرض أن : بعد الطرف السفلى عن الحائط = س ، بعد الطرف العلوى عن الأرض = ص

فيكون $\frac{ءس}{ءن} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{ءص}{ءن}$ = ؟؟؟؟ ، س = ٣م

∵ $\boxed{س^{٢} + ص^{٢} = ٥^{٢}}$ .... (١) ، س = ٣ م ⟸ ص = ٤ م

بإشتقاق العلاقة (١) بالنسبة للزمن ن

$٢س \times \frac{ءس}{ءن} + ٢ص \times \frac{ءص}{ءن} = ٠$ بالقسمة ÷ ٢ ⟸ $\boxed{س \times \frac{ءس}{ءن} + ص \times \frac{ءص}{ءن} = ٠}$ .... (٢)

بالتعويض عن س ، ص ، $\frac{ءس}{ءن}$

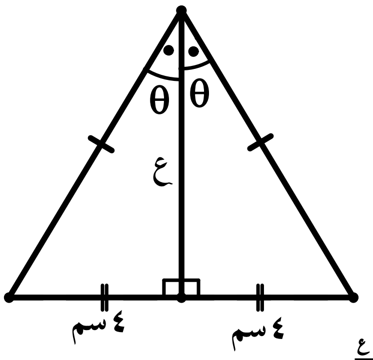
$٣ \times \frac{١}{٢} + ٤ \times \frac{ءص}{ءن} = ٠$ ⟸ $\frac{ءص}{ءن} = -\frac{٣}{٨}$ م/د

✸ عندما يتحرك الطرفان بنفس المعدل يكون $\frac{ءص}{ءن} = -\frac{ءس}{ءن}$ بالتعويض فى (٢)

$س \times \frac{ءس}{ءن} + ص \times (-\frac{ءس}{ءن}) = ٠$ بالقسمة ÷ $\frac{ءس}{ءن}$

س − ص = ٠ ⟸ $\boxed{ص = س}$ .... (٣) بالتعويض من (٣) فى (١)

$س^{٢} + س^{٢} = ٢٥$ ⟸ $س^{٢} = \frac{٢٥}{٢}$ ⟸ $س = ٢.٥\sqrt{٢}$ م



(١٠) نفرض أن إرتفاع Δ يساوى ع ، قياس زاوية رأسه يساوى ٢θ

المطلوب $\frac{ء(٢\theta)}{ءن}$ عندما ع = ٦ سم ، $\frac{ءع}{ءن} = ٢$

∵ $ظا\theta = \frac{٤}{ع}$ ، ع = ٦ ⟸ $ظا\theta = \frac{٢}{٣}$

∴ $جتا\theta = \frac{٣}{\sqrt{١٣}}$ ⟸ $قا^{٢}\theta = \frac{١٣}{٩}$

∵ $ظا\theta = \frac{٤}{ع}$ بالإشتقاق بالنسبة للزمن ⟸ $\frac{ء\theta}{ءن} قا^{٢}\theta = \frac{-٤ \times \frac{ءع}{ءن}}{ع^{٢}}$

∴ $\frac{ء\theta}{ءن} \times \frac{١٣}{٩} = \frac{-٤ \times ٢}{٦^{٢}}$ ⟸ $\frac{ء\theta}{ءن} = \frac{-٢}{١٣}$ ⟸ $\frac{ء(٢\theta)}{ءن} = \frac{-٤}{١٣}$

---

(١١) نفرض أن بعد الرجل عن قاعدة المصباح = س متراً ، طول ظل الرجل = ص متراً

، بعد رأس الرجل عن المصباح = ف متراً ، بعد نهاية ظل الرجل عن قاعدة المصباح = ع

∵ الرجل يتحرك مبتعداً عن قاعدة المصباح بسرعة ٣م/ث ∴ $\frac{ءس}{ءن} = ٣$م/ث

$\boxed{١}$ إيجاد معدل تغير طول ظل الرجل يعنى إيجاد $\frac{ءص}{ءن}$

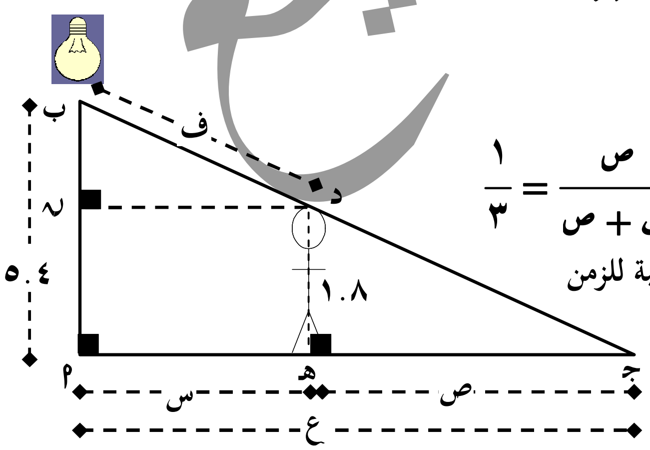
فى Δ ا ب جـ ∵ $\overline{اب} // \overline{هـ د}$

∴ $\frac{جـ هـ}{جـ ا} = \frac{د هـ}{ا ب}$ ⟸ $\frac{ص}{س + ص} = \frac{١,٨}{٥,٤}$ ⟸ $\frac{ص}{س + ص} = \frac{١}{٣}$

∴ ٣ ص = س + ص ⟸ ٢ ص = س بالإشتقاق بالنسبة للزمن

$٢ \times \frac{ءص}{ءن} = \frac{ءس}{ءن}$ بالتعويض عن $\frac{ءس}{ءن}$

∴ $\frac{ءص}{ءن} = \frac{١}{٢} \times ٣ = \frac{٣}{٢}$ م/ث



٢ إيجاد سرعة نهاية ظل الرجل يعنى إيجاد $\frac{ءع}{ءن}$ "كأن جسم يتحرك عند جـ و نريد إيجاد سرعته "

∵ ع = س + ص   بالإشتقاق بالنسبة للزمن ن

∴ $\frac{ءع}{ءن} = \frac{ءس}{ءن} + \frac{ءص}{ءن}$ ⟸ $\frac{ءع}{ءن}$ = ٣ + $\frac{٣}{٣}$ = ٤ م/ث

٣ إيجاد معدل تغير بعد رأس الرجل عن المصباح نوجد $\frac{ءف}{ءن}$ عندما س = ٤.٨ م

من هندسة الشكل د ن = هـ ٩ = س ، ب ن = ٥.٤ – ١.٨ = ٣.٦ م

فى △ ب ن د   ف^{٢} = س^{٢} + (٣.٦)^{٢} ⟸ ف = $\sqrt{س^{٢} + (٣.٦)^{٢}}$

ف = (س^{٢} + (٣.٦)^{٢})$^{\frac{١}{٢}}$ بالإشتقاق بالنسبة للزمن ⟸ $\frac{ءف}{ءن} = \frac{١}{٢}$ (س^{٢} + (٣.٦)^{٢})$^{-\frac{١}{٢}}$ × ٢ س × $\frac{ءس}{ءن}$

$\frac{ءف}{ءن} = \frac{١}{٢}$ × ((٤.٨)^{٢} + (٣.٦)^{٢})$^{-\frac{١}{٢}}$ × ٢ × ٤.٨ × ٣ = ٢.٤ م / ث

---

(١٢) نفرض أن إرتفاع السائل فى الوعاء = ع سم ، حجم السائل = ح

أى أن $\frac{ءح}{ءن}$ = ٢ سم^{٣}/ث ، نق = ٢ سم

∵ ح = π نق^{٢} ع ⟸ ح = ٤π ع بالإشتقاق بالنسبة للزمن

$\frac{ءح}{ءن}$ = ٤π $\frac{ءع}{ءن}$ ⟸ ٢ = ٤ × $\frac{٢٢}{٧}$ × $\frac{ءع}{ءن}$

$\frac{ءع}{ءن}$ = $\frac{٧}{٤٤}$ سم/ث .

∵ $\frac{ءح}{ءن}$ = ٢ سم^{٣}/ث ∴ ح = ٢ ن حتى يمتلئ الوعاء يجب أن يكون حجم السائل مساوياً حجم الوعاء

∴ ٢ ن = π × ٤ × ٢.٨ ⟸ ٢ن = $\frac{٢٢}{٧}$ × ٤ × ٢.٨ ⟸ ن = ١٧.٦ ث

سلوك الدالة :

(١) ∵ ص = جاس + جتاس ⟸ $\frac{ءص}{ءس}$ = جتاس – جاس

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ ⟸ جتاس – جاس = ٠

∴ جاس = جتاس ⟸ $\frac{جاس}{جتاس}$ = ١

∴ ظاس = ١ ⟸ س = ظا$^{-١}$(١) أو س = ١٨٠ + ظا$^{-١}$(١)

∴ س = ٤٥° أو س = ٢٢٥° ⟸ $\boxed{س = \frac{ط}{٤}}$ أو $\boxed{س = \frac{٥ط}{٤}}$

	٠		$\frac{ط}{٤}$		$\frac{٥ط}{٤}$		$\frac{٣ط}{٢}$	
إشارة المشتقة		+		–		+		
إطراد الدالة		↗		↘		↗		

∴ الدالة تزايدية ∀ س ∈] ٠ ، $\frac{ط}{٤}$ [∪] $\frac{٥}{٤}$ ط ، $\frac{٣}{٢}$ ط [

، الدالة تناقصية ∀ س ∈] $\frac{ط}{٤}$ ، $\frac{٥}{٤}$ ط [

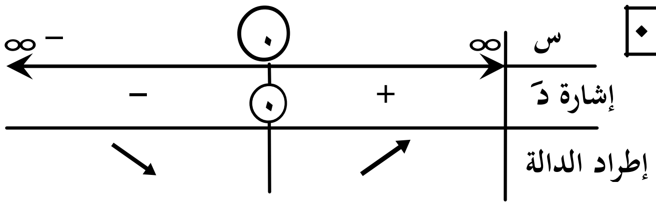
(٢) ∵ د(س) = س − هـ^س ⟸ د/(س) = ١ − هـ^س

د/(س) = ٠ ⟸ ١ − هـ^س = ٠

∴ هـ^س = ١ ⟸ $\boxed{\text{س} = ٠}$

∴ الدالة تزايدية ∀ س ∈]٠ ، ∞[

، الدالة تناقصية ∀ س ∈]−∞ ، ٠[



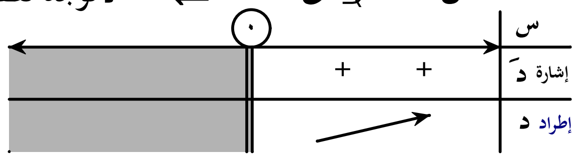
---

(٣) ∵ د(س) = س + لـو_هـ س ⟸ مجال الدالة ع^+

∴ د/(س) = ١ + $\frac{١}{\text{س}}$ ⟸ ١ + $\frac{١}{\text{س}}$ = ٠ ⟸ س = −١ ∉ ع^+

د/(س) غير معرفة ⟸ س = ٠ ∉ ع^+ ⟸ لاتوجد نقط حرجة.

∴ الدالة تزايدية على مجالها.

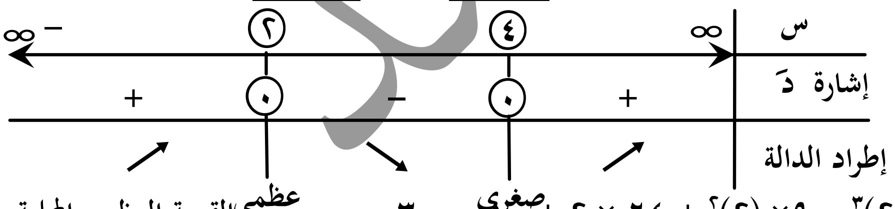


---

(٤) دَ(س) = ٣ س^٢ − ١٨س + ٢٤　　　نعين مواقع النقط الحرجة للدالة

٣س^٢ − ١٨ س + ٢٤ = ٠　بالقسمة ÷ ٣ ⟸ س^٢ − ٦س + ٨ = ٠

(س − ٢)(س − ٤) = ٠ ⟸ $\boxed{\text{س} = ٢}$ ، $\boxed{\text{س} = ٤}$



د(٢) = (٢)^٣ − ٩× (٢)^٢ + ٢٤ × ٢ + ١٠ = ٣٠　∴ القيمة العظمى المحلية = ٣٠

د(٤) = (٤)^٣ − ٩× (٤)^٢ + ٢٤ × ٤ + ١٠ = ٢٦　∴ القيمة الصغرى المحلية = ٢٦

النقطة (٢ ، ٣٠) تسمى نقطة عظمى محلية ، النقطة (٤ ، ٢٦) تسمى صغرى محلية .

حل آخر :

دَ(س) = ٣ س^٢ − ١٨س + ٢٤　　　نعين مواقع النقط الحرجة للدالة

٣س^٢ − ١٨ س + ٢٤ = ٠　بالقسمة ÷ ٣ ⟸ س^٢ − ٦س + ٨ = ٠

(س − ٢)(س − ٤) = ٠ ⟸ $\boxed{\text{س} = ٢}$ ، $\boxed{\text{س} = ٤}$

دً(س) = ٦س − ١٨ ⟸ دً(٢) = ٦ × ٢ − ١٨ = عدد سالب　∴ س = ٢ موقع عظمى.

، دً(٤) = ٦ × ٤ − ١٨ = عدد موجب ⟸ س = ٤ موقع صغرى محلية .

د(٢) = (٢)^٣ − ٩× (٢)^٢ + ٢٤ × ٢ + ١٠ = ٣٠　∴ القيمة العظمى المحلية = ٣٠

د(٤) = (٤)^٣ − ٩× (٤)^٢ + ٢٤ × ٤ + ١٠ = ٢٦　∴ القيمة الصغرى المحلية = ٢٦

(٥) $د(س) = \sqrt[٣]{(س - ١)^{٢}} + ٢$ ⇐ $د(س) = (س - ١)^{\frac{٢}{٣}} + ٢$

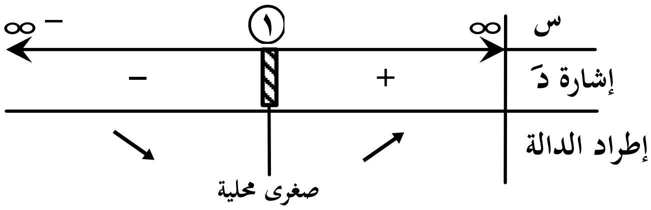
$دَ(س) = \frac{٢}{٣}(س - ١)^{-\frac{١}{٣}}$ ⇐ $دَ(س) = \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{\sqrt[٣]{س - ١}}$

$دَ(س) = ٠$ ⇐ $\frac{٢}{٣} \times \frac{١}{\sqrt[٣]{س - ١}} = ٠$ ⇐ غير ممكن

$دَ(س)$ غير معرفة عندما $س = ١$ " أصفار المقام "

$د(١) = \sqrt[٣]{(١ - ١)^{٢}} + ٢$

$د(١) = ٢$ قيمة صغرى محلية .



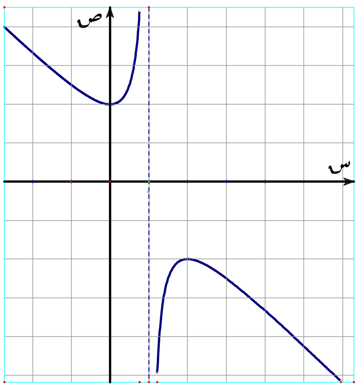
---

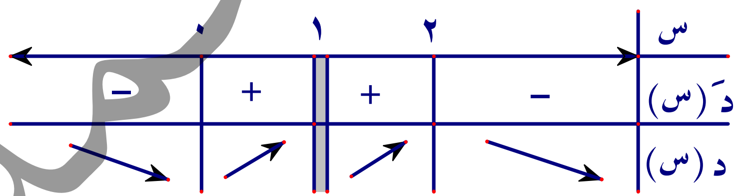
(٦) ∵ $د(س) = \frac{س^{٢}}{١ - س} + ٢$ ⇐ مجال الدالة = ح − { ١ }

، $د'(س) = \frac{٢س(١ - س) + س^{٢}}{(١ - س)^{٢}}$ ⇐ $د'(س) = \frac{س(٢ - س)}{(١ - س)^{٢}}$

∴ $د'(س) = ٠$ ⇐ $س(٢ - س) = ٠$

∴ $\boxed{س = ٠}$ ، $\boxed{س = ٢}$





القيمة العظمى المحلية = $د(٢) = \frac{٢^{٢}}{١ - ٢} + ٢ = -٢$

القيمة الصغرى المحلية = $د(٠) = \frac{٠^{٢}}{١ - ٠} + ٢ = ٢$

---

(٧) ∵ $د(س) = لـو_{هـ}\left(هـ^{٢س} - ٢هـ^{س} + ٣\right)$ ⇐ مجال الدالة هو مجموعة حل $هـ^{٢س} - ٢هـ^{س} + ٣ > ٠$

لإيجاد مجموعة حل هذه المتباينة يجب إيجاد جذور المعادلة $هـ^{٢س} - ٢هـ^{س} + ٣ = ٠$

نوجد مميز المعادلة : $ب^{٢} - ٤أجـ = (-٢)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٣ = -٨$ " عدد سالب "

∴ المعادلة ليس لها أصفار " جذور " ⇐ المقدار $هـ^{٢س} - ٢هـ^{س} + ٣$ له نفس إشارة $هـ^{٢س}$

أي أن المقدار $هـ^{٢س} - ٢هـ^{س} + ٣$ موجب مهما كانت قيمة س

∴ مجال الدالة = ح

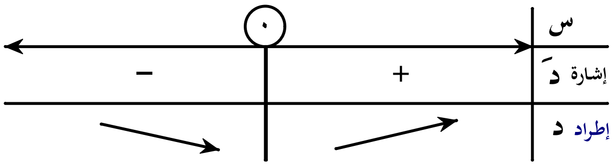
∵ $د(س) = لـو_{هـ}\left(هـ^{٢س} - ٢هـ^{س} + ٣\right)$ ⇐ $د'(س) = \frac{٢هـ^{٢س} - ٢هـ^{س}}{هـ^{٢س} - ٢هـ^{س} + ٣}$

∴ $د'(س) = \frac{٢هـ^{س}\left(هـ^{س} - ١\right)}{هـ^{٢س} - ٢هـ^{س} + ٣}$ نوجد مواقع النقط الحرجة

$\therefore$ د$'$(س) $= 0$ $\Leftarrow$ 2 هـ^{س} (هـ^{س} $- 1$) $= 0$

$\therefore$ هـ^{س} $= 0$ غير ممكن ، هـ^{س} $= 1$ $\Leftarrow$ $\boxed{س = 0}$

$\therefore$ القيمة الصغرى المحلية = د (٠)



= لـو$_{هـ}$ (هـ^{٠} − ٢ × هـ^{٠} + ٣)

= لـو$_{هـ}$ (١ − ٢ × ١ + ٣)

= لـو$_{هـ}$ ٢ = ٠,٦٩ تقريبا $\qquad$ $\boxed{\ln}\boxed{2}\boxed{=}$

---

(٨) $\because$ د(س) = هـ$^{\frac{1}{س}}$ $\left(\frac{1}{س} - 2\right)$ $\Leftarrow$ مجال الدالة = ح − {٠}

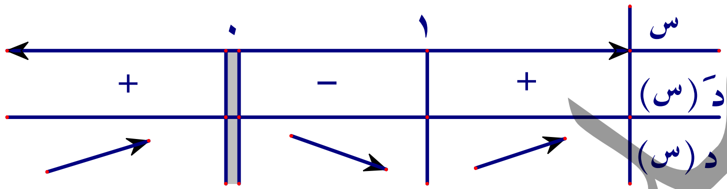
$\therefore$ د$'$(س) = $\frac{-1}{س^2}$ هـ$^{\frac{1}{س}}$ $\left(\frac{1}{س} - 2\right)$ + $\left(\frac{-1}{س^2}\right)$ هـ$^{\frac{1}{س}}$ نوجد مواقع النقط الحرجة

$\therefore$ د$'$(س) $= 0$ $\Leftarrow$ $\frac{-1}{س^2}$ هـ$^{\frac{1}{س}}$ $\left(\frac{1}{س} - 2\right)$ + $\left(\frac{-1}{س^2}\right)$ هـ$^{\frac{1}{س}}$ $= 0$

$\therefore$ $\frac{-1}{س^2}$ هـ$^{\frac{1}{س}}$ $\left(\frac{1}{س} - 2 + 1\right) = 0$ $\Leftarrow$ $\frac{-1}{س^2}$ هـ$^{\frac{1}{س}}$ $\left(\frac{1}{س} - 1\right) = 0$

$\therefore$ $\frac{-1}{س^2} = 0$ غير ممكن أو هـ$^{\frac{1}{س}} = 0$ غير ممكن أو $\frac{1}{س} - 1 = 0$ $\Leftarrow$ $\boxed{س = 1}$

$\therefore$ القيمة الصغرى المحلية = د (١)



= هـ × (١ − ٢)

= − هـ

---

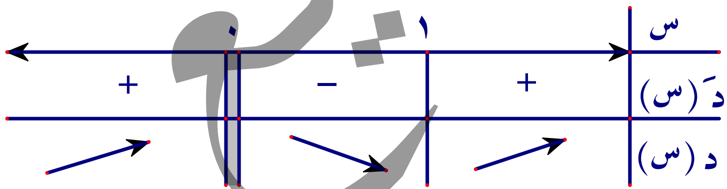
(٩) $\because$ د(س) = س^{2} − ١ − ٢ لـو$_{هـ}$|س| $\Leftarrow$ مجال الدالة = ح − {٠}

$\therefore$ د$'$(س) = ٢س − ٢ × $\frac{1}{س}$ $\Leftarrow$ د$'$(س) = ٢س − $\frac{2}{س}$ نوجد مواقع النقط الحرجة

$\therefore$ د$'$(س) $= 0$ $\Leftarrow$ ٢س − $\frac{2}{س}$ $= 0$ بالضرب × $\frac{1}{2}$ س

$\therefore$ س^{2} − ١ = ٠ $\Leftarrow$ $\boxed{س = 1}$ أو $\boxed{س = -1}$

$\therefore$ القيمة الصغرى المحلية = د (١)



= هـ × (١ − ٢) = − هـ

---

(١٠) $\because$ د (س) = س^{3} + ٢س^{2} − ٤س − ٨ $\Leftarrow$ دَ (س) = ٣س^{2} + ٤س − ٤

دً (س) = ٦س + ٤ نوجد أصفار دً $\Leftarrow$ ٦س + ٤ = ٠ $\Leftarrow$ س = $-\frac{2}{3}$

ندرس إشارة دً (س)

∀ س ∈] − ∞ ، − $\frac{٢}{٣}$ [المنحنى محدب لأعلى

، ∀ س ∈] − $\frac{٢}{٣}$ ، ∞ [المنحنى محدب لأسفل .

س	∞		− $\frac{٢}{٣}$		− ∞
إشارة دً(س)		+	٠	−	
تحدب الدالة		محدب لأسفل	إنقلاب	محدب لأعلى	

د (− $\frac{٢}{٣}$) = (− $\frac{٢}{٣}$)^{٣} + ٢ × (− $\frac{٢}{٣}$)^{٢} − ٤ × (− $\frac{٢}{٣}$) − ٨ = − $\frac{١٢٨}{٢٧}$

النقطة (− $\frac{٢}{٣}$ ، − $\frac{١٢٨}{٢٧}$) هى نقطة إنقلاب للدالة لأن المنحنى يتغير تحدبه قبل و بعد س = − $\frac{٢}{٣}$ و لها مماس عندها.

---

(١١) ∵ د (س) = س^{٣} + ٢ س^{٢} + ب س ⟸ دَ (س) = ٣س^{٢} + ٢٢س + ب

، دً (س) = ٦ س + ٢٢ ، ∵ (٢ ، ٢) نقطة إنقلا ⟸ دً (٢) = ٠

∴ ٦ × ٢ + ٢ ٢ = ٠ ⟸ ٢ = − ٦

∵ (٢ ، ٢) نقطة إنقلاب ⟸ د (٢) = ٢

٢^{٣} + ٢ × ٢^{٢} + ب × ٢ = ٢ بالتعويض عن قيمة ٢ ⟸ ب = ٩

---

(١٢)

(أ) ∵ د(س) = ٢ + ٣ س − س^{٣} ⟸ د'(س) = ٣ − ٣ س^{٢}

∴ د'(س) = ٠ ⟸ س = ١ ، س = −١ ∉ [١ ، ٣]

∴ د(٣) = −١٦ ، د(١) = ٤

∴ القيمة العظمى المطلقة = ٤ ، القيمة الصغرى المطلقة = −١٦

(ب) ∵ د(س) = س^{٢} هـ^{س} ⟸ د'(س) = ٢ س هـ^{س} + س^{٢} هـ^{س}

∴ د'(س) = س هـ^{س} (٢ + س) ⟸ د'(س) = ٠ ⟸ س = ٠ ، س = −٢

∴ د(−٣) ≃ ٠,٤٥ ، د(−٢) ≃ ٠,٥٤ ، د(٠) = ٠ ، د(١) ≃ ٢,٧٢

∴ القيمة العظمى المطلقة ≃ ٢,٧٢ ، القيمة الصغرى المطلقة = صفر

---

(١٣) دَ (س) = ٣ − ٣ س^{٢} ، دً (س) = − ٦ س

س	∞		١		−١		− ∞
إشارة دَ(س)		−	٠	+	٠	−	
إطراد الدالة		↘	عظمى	↗	صغرى	↘	

- ندرس إشارة دَ(س) = ٠

⟸ ٣ − ٣ س^{٢} = ٠

⟸ س = ± ١

- نوجد القيم العظمى و الصغرى المحلية

د (١) = ٤ ⟸ (١ ، ٤) عظمى محلية ، د(− ١) = ٠ ⟸ (− ١ ، ٠) صغرى محلية

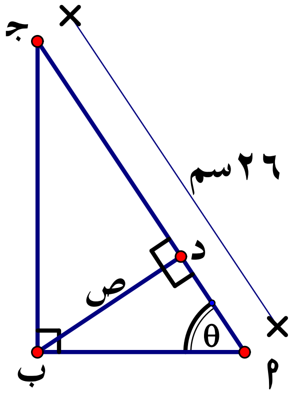
- ندرس إشارة دً(س) = ٠ ⟸ − ٦ س = ٠ ⟸ س = ٠

- نوجد نقط الإنقلاب د (٠) = ٢ ∴ (٠ ، ٢) نقطة إنقلاب .

س	∞		٠		$-\infty$
إشارة دً(س)		−	٠	+	
تحدب الدالة		محدب لأعلى	إنقلاب	محدب لأسفل	

النقطة	نوعها
(١ ، ٤)	عظمى محلية
(− ١ ، ٠)	صغرى محلية
(٠ ، ٢)	إنقلاب

تطبيقات على القيم العظمى و الصغرى:



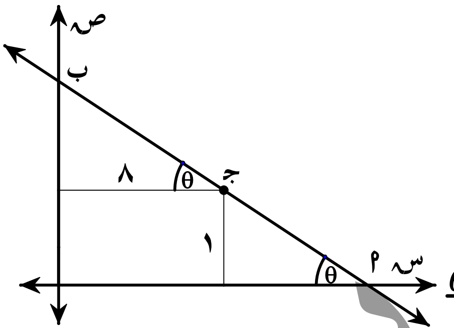
(١) نفرض أن ق($\hat{أ}$) = θ فيكون أ ب = ٢٦ جتا θ ، ب جـ = ٢٦ جا θ

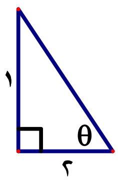
∵ ب د × أ جـ = أ ب × ب جـ ⇐ ٢٦ص = ٢٦جتا θ × ٢٦جا θ

∴ ص = ٢٦جا θجتا θ ⇐ ص = ١٣جا٢ θ

∴ $\frac{دص}{د\theta}$ = ٢٦جتا٢ θ ⇐ ٢٦جتا٢ θ = ٠ ⇐ $\boxed{\theta = \frac{ط}{٤}}$

، $\frac{د^٢ص}{د\theta^٢}$ = −٥٢جا٢ θ سالبة ⇐ أب = ١٣ $\sqrt{٢}$ ، ب جـ = ١٣ $\sqrt{٢}$ سم.





(٢) ∵ جا θ = $\frac{١}{أجـ}$ ، جتا θ = $\frac{٨}{جب}$ ⇐ $\begin{cases} أجـ = \frac{١}{جا\theta} \\ جب = \frac{٨}{جتا\theta} \end{cases}$

∴ أب = $\frac{١}{جا\theta}$ + $\frac{٨}{جتا\theta}$ ⇐ ل = $\frac{١}{جا\theta}$ + $\frac{٨}{جتا\theta}$

∴ $\frac{دل}{د\theta}$ = $\frac{جتا\theta}{جا^٢\theta}$ − $\frac{٨جا\theta}{جتا^٢\theta}$ ⇐ $\frac{دل}{د\theta}$ = $\frac{جتا^٣\theta - ٨جا^٣\theta}{جا^٢\theta جتا^٢\theta}$

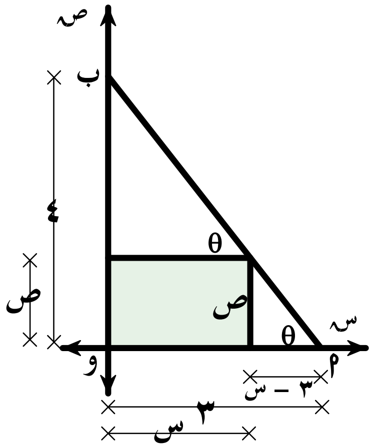
∴ $\frac{جتا^٣\theta - ٨جا^٣\theta}{جا^٢\theta جتا^٢\theta}$ = ٠ ⇐ جتا $^٣\theta$ − ٨جا $^٣\theta$ = ٠

∴ ١ − ٨ظا $^٣\theta$ = ٠ ⇐ ظا $^٣\theta$ = $\frac{١}{٨}$ ⇐ ظا θ = $\frac{١}{٢}$

∴ θ = ظا $^{-١}$ $\frac{١}{٢}$ = ٣٣َ ٢٦ْ

∴ ل = $\frac{١}{\frac{١}{\sqrt{٥}}}$ + $\frac{٨}{\frac{٢}{\sqrt{٥}}}$ ⇐ ل = ٥ $\sqrt{٥}$

θ		٣٣َ ٢٦ْ	
لَ	+		−
ل	↗		↘



(٣) نفرض أن آبعاد المستطيل هى س ، ص كما باشكل

∵ $ظا\theta = \frac{ص}{٣ - س}$ ، $ظا\theta = \frac{٤}{٣}$ ⟸ $\frac{ص}{٣ - س} = \frac{٤}{٣}$

∴ $ص = \frac{٤}{٣}(٣ - س)$ ... (١)

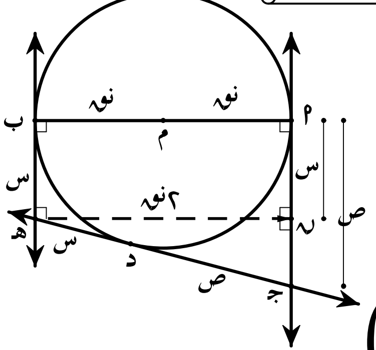
∵ المساحة م = س ص ⟸ $م = \frac{٤}{٣}س(٣ - س)$

∴ $م = ٤س - \frac{٤}{٣}س^{٢}$ ⟸ $م^{/} = ٤ - \frac{٨}{٣}س$

∴ $٤ - \frac{٨}{٣}س = ٠$ ⟸ $\boxed{س = \frac{٣}{٢}}$ ، $م^{//} = -\frac{٨}{٣}$ "عظمى"

∴ أكبر مساحة $م = ٤ \times \frac{٣}{٢} - \frac{٤}{٣} \times \frac{٩}{٤} = ٣$ وحدة مربعة .

المماسان المرسومان لدائرة من نقطة خارجها متساويان فى الطول



(٤) نفرض أن هـ ب = س ، جـ د = ص فيكون هـ د = س ، أ جـ = ص

نرسم $\overline{هـ ن} \perp \overline{أ جـ}$ فيكون ن جـ = ص − س

فى △ هـ ن جـ : $(س + ص)^{٢} = (ص - س)^{٢} + ٤نق^{٢}$

∴ $س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} = س^{٢} - ٢ س ص + ص^{٢} + ٤نق^{٢}$

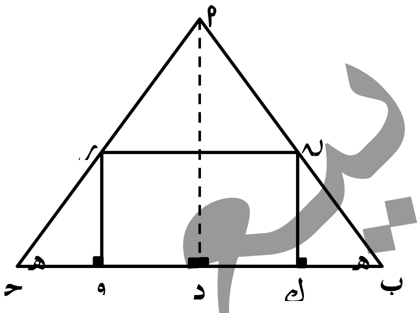
∴ $٤ س ص = ٤ نق^{٢}$ ⟸ $ص = \frac{نق^{٢}}{س}$

∵ المساحة $م = \frac{س + ص}{٢} \times ٢نق^{٢}$ ⟸ $م = ٢نق^{٢}(س + ص)$

∴ $م = ٢نق^{٢}\left(س + \frac{نق^{٢}}{س}\right)$ ⟸ $\frac{ءم}{ءس} = ٢نق^{٢}\left(١ - \frac{نق^{٢}}{س^{٢}}\right)$

∴ $٢نق^{٢}\left(١ - \frac{نق^{٢}}{س^{٢}}\right) = ٠$ ⟸ س = نق ، ∵ $\frac{ء^{٢}م}{ءس^{٢}} \succ ٠$ صغرى

∴ أصغر مساحة $م = (٢نق)^{٢}$ ⟸ أصغر مساحة = مربع طول القطر.



(٥) ∵ △ أ ب جـ متساوى الساقين ، $\overline{أ د} \perp \overline{ب جـ}$ ⟸ ب د = د جـ

∵ △ △ ن ب ك ، ر و جـ متطابقان ⟸ ب ك = جـ و

∴ ك د = د و

نفرض أن آبعاد المستطيل هى ك و = ٢ س ، ن ك = ص

فى △ أ ب د ∵ $\overline{ك ن} \parallel \overline{د أ}$ ⟸ $\frac{ب ك}{ب د} = \frac{ن ك}{أ د}$

$\frac{٩ - س}{٩} = \frac{ص}{١٢}$ ⟸ $ص = ١٢ \times \frac{٩ - س}{٩}$ ⟸ $ص = \frac{٤}{٣}(٩ - س)$

مساحة المستطيل م = ٢س ص بالتعويض عن ص

$م = ٢س \times \frac{٤}{٣}(٩ - س)$ ⟸ $م = ٢٤ س - \frac{٨}{٣} س^{٢}$ ⟸ $م^{\prime} = ٢٤ - \frac{١٦}{٣} س$

$م^{\prime} = ٠$ ⟸ $٢٤ - \frac{١٦}{٣} س = ٠$ ⟸ $س = \frac{٩}{٢}$

∵ $م'' = -\frac{١٦}{٣}$ عدد سالب عظمى

∴ مساحة المستطيل أكبر ما يمكن عندما تكون أبعاده ٢س = $٢ \times \frac{٩}{٢}$ = ٩سم ، ص = $\frac{٤}{٣}(٩ - \frac{٩}{٢})$ = ٦سم .

---

(٦) نفرض أن أبعاد متوازى المستطيلات هى ٢س ، س ، ص

∵ الحجم ح = ٥٧٦ ⟸ ٢ س^{٢} ص = ٥٧٦ ⟸ ص = $\frac{٢٨٨}{س^{٢}}$ ..... (١)

∵ المساحة السطحية م = ٦ س ص + ٤ س^{٢} بالتعويض من (١)

م = ٦ س × $\frac{٢٨٨}{س^{٢}}$ + ٤ س^{٢} ⟸ م = $\frac{٦\times٢٨٨}{س}$ + ٤ س^{٢} ⟸ $م' = \frac{-٦\times٢٨٨}{س^{٢}}$ + ٨ س

$م' = ٠$ ⟸ $\frac{-٦\times٢٨٨}{س^{٢}}$ + ٨ س = ٠ بالضرب × س^{٢}

− ٦ × ٢٨٨ + ٨ س^{٣} = ٠ ⟸ س^{٣} = ٢١٦ ⟸ س = ٦

∵ $م'' = \frac{١٢\times٢٨٨}{س^{٣}}$ + ٨ عند س = ٦ $م''$ موجبة عظمى

∴ الآبعاد التى تجعل المساحة أصغر ما يمكن هى ٦ ، ١٢ ، ٨ سم .

التكامل:

(١) $\int (١+\text{ظا}^{٢}س)\text{جتا}^{٢}س\ ءس = \int \text{قا}^{٢}س \times \text{جتا}^{٢}س\ ءس = \int ءس = س + ث$

---

(٢) $\int \frac{ءس}{\sqrt{س}\,(١+\sqrt{س})^{٣}} = ٢\int (١+\sqrt{س})^{-٣} \times \frac{١}{٢\sqrt{س}}\,ءس = -(١+\sqrt{س})^{-٢} + ث$

---

(٣) نفرض أن : ص = س − ١ ⟸ $\begin{cases} س = ص + ١ \\ ءس = ءص \end{cases}$

∴ $ت = \int (س^{٢} + ٥)\sqrt{س - ١}\ ءس$ ⟸ $ت = \int ((ص+١)^{٢} + ٥)\sqrt{ص}\ ءص$

∴ $ت = \int (ص^{٢} + ٢ص + ٦)\sqrt{ص}\ ءص$ ⟸ $ت = \int (ص^{\frac{٥}{٢}} + ٢ص^{\frac{٣}{٢}} + ٦ص^{\frac{١}{٢}})\ ءص$

∴ $ت = \frac{٢}{٧}ص^{\frac{٧}{٢}} + \frac{٤}{٥}ص^{\frac{٥}{٢}} + ٤ص^{\frac{٣}{٢}} + ث$ ⟸ $ت = \frac{٢}{٧}(س-١)^{\frac{٧}{٢}} + \frac{٤}{٥}(س-١)^{\frac{٥}{٢}} + ٤(س-١)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

∴ $ت = \frac{٢}{٣٥}(س-١)^{\frac{٣}{٢}}\left[٥(س-١)^{٢} + ١٤(س-١) + ٧٠\right] + ث$

∴ $ت = \frac{٢}{٣٥}\sqrt{(س-١)^{٣}}\left[٥(س-١)^{٢} + ١٤(س-١) + ٧٠\right] + ث$

∴ $ت = \frac{٢}{٣٥}\sqrt{(س-١)^{٣}}\left[٥س^{٢} + ٤س + ٦١\right] + ث$

حل آخر:

نفرض أن : $ص = \sqrt{س - ١}$ ⟸ $\begin{cases} س = ص^{٢} + ١ \\ ءس = ٢ص ءص \end{cases}$

∴ $ت = \int (س^{٢} + ٥)\sqrt{س - ١}\ ءس$ ⟸ $ت = \int ((ص^{٢}+١)^{٢} + ٥)ص \times ٢ص\ ءص$

$\therefore$ ت $= \int 2(\text{ص}^4 + 2\text{ص}^2 + 6)\text{ص}^2\ \text{ءص} \Leftarrow$ ت $= \int (2\text{ص}^6 + 4\text{ص}^4 + 12\text{ص}^2)\ \text{ءص}$

$\therefore$ ت $= \frac{2}{7}\text{ص}^7 + \frac{4}{5}\text{ص}^5 + 4\text{ص}^3 + \text{ث} \Leftarrow$ ت $= \frac{2}{7}(\text{س}-1)^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}(\text{س}-1)^{\frac{5}{2}} + 4(\text{س}-1)^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$

$\therefore$ ت $= \frac{2}{35}(\text{س}-1)^{\frac{3}{2}}\left[5(\text{س}-1)^2 + 14(\text{س}-1) + 70\right] + \text{ث}$

$\therefore$ ت $= \frac{2}{35}\sqrt{(\text{س}-1)^3}\left[5(\text{س}-1)^2 + 14(\text{س}-1) + 70\right] + \text{ث}$

$\therefore$ ت $= \frac{2}{35}\sqrt{(\text{س}-1)^3}\left[5\text{س}^2 + 4\text{س} + 61\right] + \text{ث}$

---

(٤) ت $= \frac{-1}{2}\text{س هـ}^{-2\text{س}} + \frac{1}{2}\int \text{هـ}^{-2\text{س}}\ \text{ءس}$

ت $= \frac{-1}{2}\text{س هـ}^{-2\text{س}} + \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2}\text{هـ}^{-2\text{س}} + \text{ث}$

ت $= \frac{-1}{2}\text{س هـ}^{-2\text{س}} - \frac{1}{4}\text{هـ}^{-2\text{س}} + \text{ث}$

$\boxed{\text{ص} = \text{س}}$ ↓ تفاضل $\boxed{\text{ءص} = \text{ءس}}$ $\xrightarrow{-\int}$ $\boxed{\text{ءع} = \text{هـ}^{-2\text{س}}\ \text{ءس}}$ ↓ تكامل $\boxed{\text{ع} = \frac{-1}{2}\text{هـ}^{-2\text{س}}}$

---

(٥) ت $= 2\text{س}^{\frac{1}{2}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - 2\int \text{س}^{\frac{-1}{2}}\ \text{ءس}$

ت $= 2\text{س}^{\frac{1}{2}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - 2 \times 2\text{س}^{\frac{1}{2}} + \text{ث} \Leftarrow$ ت $= 2\sqrt{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - 4\sqrt{\text{س}} + \text{ث}$

$\boxed{\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$ ↓ تفاضل $\boxed{\text{ءق} = \frac{\text{ءس}}{\text{س}}}$ $\xrightarrow{-\int}$ $\boxed{\text{ءع} = \text{س}^{\frac{-1}{2}}\ \text{ءس}}$ ↓ تكامل $\boxed{\text{ع} = 2\text{س}^{\frac{1}{2}}}$

حل آخر:

نفرض أن : ص $= \sqrt{\text{س}} \Leftarrow \begin{cases} \text{س} = \text{ص}^2 \\ \text{ءس} = 2\text{ص ءص} \end{cases}$

ت $= \int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{ءس} \Leftarrow$ ت $= \int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}^2}{\text{ص}} \times 2\text{ص ءص}$

ت $= 4\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص ءص}$

ت $= 4\left(\text{ص لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int \text{ءص}\right)$

ت $= 4\left(\text{ص لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \text{ص}\right) + \text{ث} \Leftarrow$ ت $= 4\sqrt{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}} - 4\sqrt{\text{س}} + \text{ث}$

$\boxed{\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}}$ ↓ تفاضل $\boxed{\text{ءق} = \frac{\text{ءص}}{\text{ص}}}$ $\xrightarrow{-\int}$ $\boxed{\text{ءع} = \text{ءص}}$ ↓ تكامل $\boxed{\text{ع} = \text{ص}}$

---

(٦) ليكن ت $= \int \text{س جاس ءس}$

$\therefore$ ت $= \text{س جتاس} - \int \text{جتاس ءس} \Leftarrow$ ت $= \text{س جتاس} - \text{جاس} + \text{ث}$

$\boxed{\text{ص} = \text{س}}$ ↓ تفاضل $\boxed{\text{ءص} = \text{ءس}}$ $\xrightarrow{-\int}$ $\boxed{\text{ءع} = \text{قا}^2\text{س ءس}}$ ↓ تكامل $\boxed{\text{ع} = \text{ظاس}}$

---

(٧) نفرض أن : ص $= 2\text{س} + 1 \Leftarrow \begin{cases} \text{س} = \frac{1}{2}(\text{ص}-1) \\ \text{ءس} = \frac{1}{2}\text{ءص} \end{cases}$

$$\text{ت} = \int \frac{٤\text{س}}{\sqrt[3]{٢\text{س}+١}}\,\text{ءس} \Leftarrow \text{ت} = \int \frac{٤\times\frac{١}{٢}(\text{ص}-١)}{\sqrt[3]{\text{ص}}}\times\frac{١}{٢}\,\text{ءص}$$

$$\text{ت} = \int (\text{ص}-١)\times \text{ص}^{\frac{-١}{٣}}\,\text{ءص} \Leftarrow \text{ت} = \int \left(\text{ص}^{\frac{٢}{٣}} - \text{ص}^{\frac{-١}{٣}}\right)\text{ءص}$$

$$\text{ت} = \frac{٣}{٥}\text{ص}^{\frac{٥}{٣}} - \frac{٣}{٢}\text{ص}^{\frac{٢}{٣}} + \text{ث} \Leftarrow \text{ت} = \frac{٣}{٥}(٢\text{س}+١)^{\frac{٥}{٣}} - \frac{٣}{٢}(٢\text{س}+١)^{\frac{٢}{٣}} + \text{ث}$$

---

(٨) $\text{ت} = \int \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس}$ نفرض أن $\boxed{\text{ع} = \sqrt{\text{س}}}$ $\Leftarrow$ $\text{ءع} = \frac{\text{ءس}}{٢\sqrt{\text{س}}}$

$\therefore \text{ءع} = \frac{\text{ءس}}{٢\text{ع}} \Leftarrow \boxed{\text{ءس} = ٢\text{ع}\,\text{ءع}}$

$\therefore \text{ت} = \int \text{هـ}^{\text{ع}} \times ٢\text{ع}\,\text{ءع} \Leftarrow \text{ت} = \int ٢\text{ع}\,\text{هـ}^{\text{ع}}\,\text{ءع}$

$\therefore \text{ت} = ٢\text{ع}\,\text{هـ}^{\text{ع}} - ٢\int \text{هـ}^{\text{ع}}\,\text{ءع} = ٢\text{ع}\,\text{هـ}^{\text{ع}} - ٢\text{هـ}^{\text{ع}} + \text{ث}$

$\boxed{\text{ص} = ٢\text{ع}}$ $\xrightarrow{\text{تفاضل}}$ $\boxed{\text{ءص} = ٢\,\text{ءع}}$

$\boxed{\text{ءع} = \text{هـ}^{\text{ع}}\,\text{ءع}}$ $\xrightarrow{\text{تكامل}}$ $\boxed{\text{ع} = \text{هـ}^{\text{ع}}}$

$\xrightarrow{\int}$

(٩) نفرض أن $\text{ت} = \int \text{س}^{-٢}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{ءس}$

$\therefore \text{ت} = (-\text{س}^{-١})\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int (-\text{س}^{-١})\left(\frac{١}{\text{س}}\right)\text{ءس}$

$\therefore \text{ت} = \frac{-١}{\text{س}}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} + \int \text{س}^{-٢}\,\text{ءس} \Leftarrow \text{ت} = \frac{-١}{\text{س}}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{س}^{-١} + \text{ث}$

---

(١٠) $\text{ت} = \int \text{س}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{٢}\text{ءس}$

$\therefore \text{ت} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{٢} - \int \left(\frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\right)\left(\frac{٢}{\text{س}}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{ءس}\right)$

$\therefore \text{ت} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{٢} - \int \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{ءس}$

$\therefore \text{ت} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{٢} - \left(\frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int\left(\frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\right)\left(\frac{\text{ءس}}{\text{س}}\right)\right)$

$\therefore \text{ت} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{٢} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} + \int \frac{١}{٢}\text{س}\,\text{ءس}$

$\therefore \text{ت} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{٢} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} + \frac{١}{٤}\text{س}^{٢} + \text{ث}$

$\boxed{\text{ص} = \left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{٢}}$ $\xrightarrow{\text{تفاضل}}$ $\boxed{\text{ءص} = \frac{٢}{\text{س}}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{ءس}}$

$\boxed{\text{ءع} = \text{س}\,\text{ءس}}$ $\xrightarrow{\text{تكامل}}$ $\boxed{\text{ع} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}}$

$\xrightarrow{\int}$

$\boxed{\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}$ $\xrightarrow{\text{تفاضل}}$ $\boxed{\text{ءص} = \frac{\text{ءس}}{\text{س}}}$

$\boxed{\text{ءع} = \text{س}\,\text{ءس}}$ $\xrightarrow{\text{تكامل}}$ $\boxed{\text{ع} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}}$

$\xrightarrow{\int}$

---

(١١) نفرض أن $\text{ت} = \int \text{س}^{٣}\sqrt{٤-\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$

$\therefore \text{ت} = \int \left(\frac{\text{س}^{٣}}{-٢\text{س}} \times -٢\text{س}\sqrt{٤-\text{س}^{٢}}\right)\text{ءس}$

$\therefore \text{ت} = \int \left(\frac{-١}{٢}\text{س}^{٢} \times -٢\text{س}\left(٤-\text{س}^{٢}\right)^{\frac{١}{٢}}\right)\text{ءس}$

$\boxed{\text{ص} = \frac{-١}{٢}\text{س}^{٢}}$ $\xrightarrow{\text{تفاضل}}$ $\boxed{\text{ءص} = -\text{س}\,\text{ءس}}$

$\boxed{\text{ءع} = -٢\text{س}\left(٤-\text{س}^{٢}\right)^{\frac{١}{٢}}\text{ءس}}$ $\xrightarrow{\text{تكامل}}$ $\boxed{\text{ع} = \frac{٢}{٣}\left(٤-\text{س}^{٢}\right)^{\frac{٣}{٢}}}$

$\xrightarrow{\int}$

$$\therefore\ \text{ت} = \frac{-1}{2}\text{س}^{2}\times\frac{2}{3}(4-\text{س}^{2})^{\frac{3}{2}} - \int\left(\frac{2}{3}(4-\text{س}^{2})^{\frac{3}{2}}\right)(-\text{س})\,\text{ءس}$$

$$\therefore\ \text{ت} = \frac{-1}{3}\text{س}^{2}(4-\text{س}^{2})^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\int\left(\text{س}(4-\text{س}^{2})^{\frac{3}{2}}\right)\text{ءس}$$

$$\therefore\ \text{ت} = \frac{-1}{3}\text{س}^{2}(4-\text{س}^{2})^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\times\frac{-1}{2}\int\left(-2\text{س}(4-\text{س}^{2})^{\frac{3}{2}}\right)\text{ءس}$$

$$\therefore\ \text{ت} = \frac{-1}{3}\text{س}^{2}(4-\text{س}^{2})^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\times\frac{2}{5}(4-\text{س}^{2})^{\frac{5}{2}} + \text{ث}$$

$$\therefore\ \text{ت} = \frac{-1}{3}\text{س}^{2}(4-\text{س}^{2})^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}(4-\text{س}^{2})^{\frac{5}{2}} + \text{ث}$$

---

(١٢) $\int(3+\text{جاس})^{5}\,\text{جتاس}\,\text{ءس} = \frac{1}{6}(3+\text{جاس})^{6}+\text{ث}$

---

(١٣) $\int\frac{\text{قا}^{2}(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س})}{\text{س}}\,\text{ءس} = \int\underbrace{\frac{1}{\text{س}}}_{\text{مشتقة الزاوية}}\times\text{قا}^{2}(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س})\,\text{ءس} = \text{ظا}(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}) + \text{ث}$

---

(١٤) نفرض أن : $\text{ص} = 3\text{س}+1 \Leftarrow \begin{cases}\text{س} = \frac{1}{3}(\text{ص}-1)\\ \text{ءس} = \frac{1}{3}\text{ءص}\end{cases}$

$\therefore\ \text{ت} = \int\text{س}^{2}\sqrt[3]{3\text{س}+1}\,\text{ءس} \quad\Leftarrow\quad \text{ت} = \int\frac{1}{9}(\text{ص}-1)^{2}\sqrt[3]{\text{ص}}\times\frac{1}{3}\text{ءص}$

$\therefore\ \text{ت} = \frac{1}{27}\int(\text{ص}^{2}-2\text{ص}+1)\text{ص}^{\frac{1}{3}}\text{ءص} \quad\Leftarrow\quad \text{ت} = \frac{1}{27}\int(\text{ص}^{2}-2\text{ص}+1)\text{ص}^{\frac{1}{3}}\text{ءص}$

$\therefore\ \text{ت} = \frac{1}{27}\int\left(\text{ص}^{\frac{7}{3}}-2\text{ص}^{\frac{4}{3}}+\text{ص}^{\frac{1}{3}}\right)\text{ءص} \quad\Leftarrow\quad \text{ت} = \frac{1}{27}\int\left(\text{ص}^{\frac{7}{3}}-2\text{ص}^{\frac{4}{3}}+\text{ص}^{\frac{1}{3}}\right)\text{ءص}$

$\therefore\ \text{ت} = \frac{1}{27}\left(\frac{3}{10}\text{ص}^{\frac{10}{3}}-\frac{6}{7}\text{ص}^{\frac{7}{3}}+\frac{3}{4}\text{ص}^{\frac{4}{3}}\right)+\text{ث}$

$\therefore\ \text{ت} = \frac{1}{27}\left(\frac{3}{10}(3\text{س}+1)^{\frac{10}{3}}-\frac{6}{7}(3\text{س}+1)^{\frac{7}{3}}+\frac{3}{4}(3\text{س}+1)^{\frac{4}{3}}\right)+\text{ث}$

---

(١٥) $\text{ت} = \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) - \int\frac{\text{س}}{\text{س}+1}\text{ءس}$

$\boxed{\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)}$ $\boxed{\text{ءع} = \text{ءس}}$

تفاضل ↓ تكامل ↓

$\boxed{\text{ءص} = \frac{\text{ءس}}{\text{س}+1}}$ $\xrightarrow{\int}$ $\boxed{\text{ع} = \text{س}}$

$\text{ت} = \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) - \int\frac{(\text{س}+1)-1}{\text{س}+1}\text{ءس}$

$\text{ت} = \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) - \int\left[\frac{\text{س}+1}{\text{س}+1}-\frac{1}{\text{س}+1}\right]\text{ءس}$

$\text{ت} = \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) - \int\left[1-\frac{1}{\text{س}+1}\right]\text{ءس} \quad\Leftarrow\quad \text{ت} = \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) - \left[\text{س}-\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)\right]+\text{ث}$

$\text{ت} = \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) - \text{س} + \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) + \text{ث} \quad\Leftarrow\quad \text{ت} = (\text{س}+1)\,\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) - \text{س} + \text{ث}$

حل آخر:

نفرض أن ص = س + ١ ⟸ { س = ص − ١ ، ءس = ءص }

∵ ت = $\int$ لـوهـ (س + ١) ءس ⟸ ت = $\int$ لـوهـ ص ءص

∴ ت = ص لـوهـ ص − $\int$ ءص ⟸ ت = ص لـوهـ ص − ص + ث

∴ ت = (س + ١) لـوهـ (س + ١) − (س + ١) + ث

$\boxed{\text{ن} = \text{لـوهـ ص}}$ ↓ تفاضل $\boxed{\text{ءن} = \frac{\text{ءص}}{\text{ص}}}$ $\xrightarrow{-\int}$ $\boxed{\text{ع} = \text{ص}}$ تكامل ↑ $\boxed{\text{ءع} = \text{ءص}}$

---

(١٦) ليكن ت = $\int$ س^{٣} لـوهـ س ءس

∴ ت = (لـوهـ س)($\frac{١}{٤}$ س^{٤}) − $\int$ ($\frac{١}{٤}$ س^{٤})($\frac{١}{\text{س}}$ ءس)

∴ ت = $\frac{١}{٤}$ س^{٤} لـوهـ س − $\int$ $\frac{١}{٤}$ س^{٣} ءس ⟸ ت = $\frac{١}{٤}$ س^{٤} لـوهـ س − $\frac{١}{١٦}$ س^{٤} + ث

$\boxed{\text{ص} = \text{لـوهـ س}}$ ↓ تفاضل $\boxed{\text{ءص} = \frac{١}{\text{س}}}$ $\xrightarrow{-\int}$ $\boxed{\text{ع} = \frac{١}{٤}\text{س}^{٤}}$ تكامل ↑ $\boxed{\text{ءع} = \text{س}^{٣}\text{ءس}}$

---

(١٧) ت = $\int$ س قا^{٢} س ءس

∴ ت = س ظاس − $\int$ ظاس ءس ⟸ ت = س ظاس − $\int \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ ءس

∴ ت = س ظاس + $\int \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ ءس ⟸ ت = س ظاس + لـوهـ |جتاس| + ث

$\boxed{\text{ص} = \text{س}}$ ↓ تفاضل $\boxed{\text{ءص} = \text{ءس}}$ $\xrightarrow{-\int}$ $\boxed{\text{ع} = \text{ظاس}}$ تكامل ↑ $\boxed{\text{ءع} = \text{قا}^{٢}\text{س ءس}}$

---

(١٨) ت = $\int$ (٣س + ٥) هـ$^{-٢س}$ ءس

ت = $\frac{-١}{٢}$ (٣س + ٥) هـ$^{-٢س}$ + $\frac{٣}{٢}$ $\int$ هـ$^{-٢س}$ ءس

ت = $\frac{-١}{٢}$ (٣س + ٥) هـ$^{-٢س}$ + $\frac{٣}{٢}$ × $\frac{-١}{٢}$ هـ$^{-٢س}$ + ث

ت = $\frac{-١}{٢}$ (٣س + ٥) هـ$^{-٢س}$ − $\frac{٣}{٤}$ هـ$^{-٢س}$ + ث

$\boxed{\text{ص} = ٣\text{س} + ٥}$ ↓ تفاضل $\boxed{\text{ءص} = ٣\text{ءس}}$ $\xrightarrow{-\int}$ $\boxed{\text{ع} = \frac{-١}{٢}\text{هـ}^{-٢\text{س}}}$ تكامل ↑ $\boxed{\text{ءع} = \text{هـ}^{-٢\text{س}}\text{ ءس}}$

---

(١٩) نفرض أن ت = $\int \frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{(\text{س} + ١)^{٢}}$ ءس ...(١)

∵ $\int$ ص ءع = ص ع − $\int$ ع ءص

∴ ت = −س هـ^{س} (س + ١)$^{-١}$ + $\int$ هـ^{س} (س + ١) × $\frac{١}{(\text{س} + ١)}$ ءس

∴ ت = −$\frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{\text{س} + ١}$ + $\int$ هـ^{س} ءس = −$\frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{\text{س} + ١}$ + هـ^{س} + ث

∴ ت = $\frac{-\text{س هـ}^{\text{س}} + \text{س هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س} + ١}$ + ث = $\frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س} + ١}$ + ث

$\boxed{\text{ص} = \text{س هـ}^{\text{س}}}$ ↓ تفاضل $\boxed{\text{ءص} = \text{س هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}}}$ $\xrightarrow{-\int}$ $\boxed{\text{ع} = -(\text{س}+١)^{-١}}$ تكامل ↑ $\boxed{\text{ءع} = (\text{س}+١)^{-٢}\text{ ءس}}$

(٢٠) $\text{د}(\text{س}) = |\text{س}^{٢} - ٤|$ دالة زوجية $\Leftarrow$ $\text{ت} = \int_{-٣}^{٣} |\text{س}^{٢} - ٤| \, \text{ءس} = ٢\int_{٠}^{٣} |\text{س}^{٢} - ٤| \, \text{ءس}$

∵ أصفار $(\text{س}^{٢} - ٤)$ هى ٢ ، −٢ ، $٢ \in [٠ ، ٣]$

∴ $\text{ت} = ٢\left[\int_{٠}^{٢} (٤ - \text{س}^{٢}) \, \text{ءس} + \int_{٢}^{٣} (\text{س}^{٢} - ٤) \, \text{ءس}\right] = ٢(\frac{١٦}{٣} + \frac{٧}{٣}) = \frac{٤٦}{٣}$

(ثانياً)

(١) ∵ $\int_{٣}^{أ-١} \text{د}(\text{س})\text{ءس} = \int_{٢}^{٣} ٢\text{د}(٢\text{س} - ١)\text{ءس}$

فى الطرف الأيسر : بوضع $\text{ص} = ٢\text{س} - ١$ $\Leftarrow$ $\text{ءص} = ٢ \, \text{ءس}$

، عندما $\text{س} = ٢$ أو $\text{س} = ٣$ $\Leftarrow$ $\text{ص} = ٣$ أو $\text{ص} = ٥$

∴ $\int_{٣}^{أ-١} \text{د}(\text{س})\text{ءس} = \int_{٣}^{٥} ٢\text{د}(\text{ص}) \times \frac{١}{٢}\text{ءص}$ $\Leftarrow$ $\int_{٣}^{أ-١} \text{د}(\text{س})\text{ءس} = \int_{٣}^{٥} \text{د}(\text{ص})\text{ءص}$

∴ $أ - ١ = ٥$ $\Leftarrow$ $\boxed{أ = ٦}$

---

(٢) ∵ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س} + \frac{١}{٢}\text{قا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}$ $\Leftarrow$ $\text{ص} = \int \left(٢\text{س} + \frac{١}{٢}\text{قا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}\right)\text{ءس}$

∴ $\text{ص} = \text{س}^{٢} + \text{ظا}\frac{\text{س}}{٢} + \text{ث}$ ، ∵ $\left(\frac{\pi}{٢} , \frac{\pi^{٢}}{٤} + ٩\right) \in$ للمنحنى

∴ $\frac{\pi^{٢}}{٤} + ٩ = \frac{\pi^{٢}}{٤} + \text{ظا}\frac{\pi}{٤} + \text{ث}$ $\Leftarrow$ $\text{ث} = ١٠$ $\Leftarrow$ $\text{ص} = \text{س}^{٢} + \text{ظا}\frac{\text{س}}{٢} + ١٠$

---

(٣) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -أ\text{قتا}^{٢}\text{س}$ $\Leftarrow$ $\text{ص} = \int (-أ\text{قتا}^{٢}\text{س})\text{ءس}$

∴ $\text{ص} = أ\text{ظتا}\,\text{س} + \text{ث}$ ، ∵ $\left(\frac{\pi}{٤} , ٥\right)$ ، $\left(\frac{٣\pi}{٤} , ١\right) \in$ للمنحنى

∴ $\left.\begin{array}{l} ٥ = أ\text{ظتا}\frac{\pi}{٤} + \text{ث} \\ ١ = أ\text{ظتا}\frac{٣\pi}{٤} + \text{ث} \end{array}\right\}$ $\Leftarrow$ $\left.\begin{array}{l} ٥ = أ + \text{ث} \\ ١ = -أ + \text{ث} \end{array}\right\}$ $\Leftarrow$ $\boxed{\text{ث} = ٣}$ ، $\boxed{أ = ٢}$

∴ معادلة المنحنى $\text{ص} = ٢\,\text{ظتا}\,\text{س} + ٣$

---

(٤) ∵ ميل العمودى $\text{م} = -\text{قتا}\,\text{س}\,\text{قا}\,\text{س}$ $\Leftarrow$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جا}\,\text{س}\,\text{جتا}\,\text{س}$

∴ $\text{ص} = \int (\text{جا}\,\text{س}\,\text{جتا}\,\text{س})\text{ءس}$ $\Leftarrow$ $\text{ص} = \text{جا}^{٢}\text{س} + \text{ث}$

∵ $\left(\frac{\pi}{٦} , ١\right)$ ∈ للمنحنى ⇐ ١ = $\left(جا \frac{\pi}{٦}\right)^{٢}$ + ث

∴ ث = $\frac{٣}{٤}$ ⇐ معادلة المنحنى هى ص = جا^{٢} س + $\frac{٣}{٤}$

---

(٥) ∵ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣}{ص + \sqrt{ص}}$ ⇐ (ص + $\sqrt{ص}$) ءص = ٣ ءس بتكامل الطرفين

∫ (ص + $\sqrt{ص}$) ءص = ∫ ٣ ءس ⇐ ∫ (ص + ص$^{\frac{١}{٢}}$) ءص = ∫ ٣ ءس

$\frac{١}{٢}$ ص^{٢} + $\frac{٢}{٣}$ ص$^{\frac{٣}{٢}}$ = ٣ س + ث ∵ ($\frac{١}{١٨}$ ، ١) ∈ للمنحنى

$\frac{١}{٢}$ × ١^{٢} + $\frac{٢}{٣}$ × (١)$^{\frac{٣}{٢}}$ = ٣ × $\frac{١}{١٨}$ + ث ⇐ ث = ١

$\frac{١}{٢}$ ص^{٢} + $\frac{٢}{٣}$ ص$^{\frac{٣}{٢}}$ = ٣ س + ١ بالضرب× ٦ ⇐ $\boxed{٣ص^{٢} + ٤\sqrt{ص^{٣}} = ١٨س + ٦}$

---

(٦) ∵ المنحنى له قيمة عظمى محلية عند النقطة (٢ ، ٧) ⇐ $\left.\begin{matrix} ص = ٧ \\ \frac{ءص}{ءس} = ٠ \end{matrix}\right\}$ عندما س = ٢

∵ صَ = ∫ ($\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$) ءس ⇐ صَ = ∫ (٢ − ٦س) ءس

صَ = ٢ س − ٣ س^{٢} + ث$_{١}$ ، ∵ صَ = ٠ عندما س = ٢

٠ = ٢ × ٢ − ٣ × ٢^{٢} + ث$_{١}$ ⇐ ث$_{١}$ = ٨ ⇐ صَ = ٢ س − ٣ س^{٢} + ٨

، ∵ ص = ∫ صَ ءس ⇐ ص = ∫ (٢ س − ٣ س^{٢} + ٨) ءس

ص = س^{٢} − س^{٣} + ٨ س + ث$_{٢}$ ، ∵ ص = ٧ عندما س = ٢

٧ = ٢^{٢} − ٢^{٣} + ٨ × ٢ + ث$_{٢}$ ⇐ ث$_{٢}$ = − ٥

∴ $\boxed{ص = س^{٢} − س^{٣} + ٨ س − ٥}$

---

(٧) ∵ ص $\frac{ءص}{ءس}$ + ٢ س = ٣ ⇐ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ − ٢ س

ص ءص = (٣ − ٢س) ءس ⇐ ∫ ص ءص = ∫ (٣ − ٢س) ءس

$\frac{١}{٢}$ ص^{٢} = ٣ س − س^{٢} + ث ∵ (١ ، ٢) ∈ للمنحنى

$\frac{١}{٢}$ × ٢^{٢} = ٣ × ١ − ١^{٢} + ث ⇐ ث = ٠

∴ $\frac{١}{٢}$ ص^{٢} = ٣ س − س^{٢} بالضرب × ٢ ⇐ $\boxed{ص^{٢} = ٦ س − ٢ س^{٢}}$

---

(٨) ليكن ميل المماس هو م ، ∵ معدل تغير ميل المماس هو ٦ س − ٣ ∴ $\frac{ءم}{ءس}$ = ٦ س − ٣

∴ م = ∫ (٦ س − ٣) ءس ⇐ م = ٣ س^{٢} − ٣ س + ث

∵ المماس أفقى عند س = ١ ⇐ م = ٠ عندما س = ١

٠ = ٣ × ١^{٢} − ٣ × ١ + ث$_{١}$ ⇐ ث$_{١}$ = ٠ ⇐ م = ٣ س^{٢} − ٣ س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\text{س}^{٢} - ٣\text{س}$ ⇐ $\text{ص} = \int (٣\text{س}^{٢} - ٣\text{س})\, \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٣} - \frac{٣}{٢}\text{س}^{٢} + \text{ث}$ ، ∵ $(٢ ، ٢) \in$ للمنحنى ⇐ $٢ = ٨ - ٦ + \text{ث}$

∴ $\text{ث} = ٠$ ⇐ $\boxed{\text{ص} = \text{س}^{٣} - \frac{٣}{٢}\text{س}^{٢}}$

----

(٩) ∵ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\text{س}^{٢} - ١٨\text{س} + ٢٤$ نعين مواقع القيم العظمى ، الصغرى المحلية

$٣\text{س}^{٢} - ١٨\text{س} + ٢٤ = ٠$ ⇐ $\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٨ = ٠$ ⇐ $(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٤) = ٠$

س = ٢ أ، س = ٤ ∵ $\text{ص}'' = ٦\text{س} - ١٨$

$[\text{ص}'']_{\text{س} = ٢} = -٦$ عدد سالب ⇐ س = ٢ موقع العظمى المحلية

$[\text{ص}'']_{\text{س} = ٤} = ٦$ عدد موجب ⇐ س = ٤ موقع الصغرى المحلية .

∴ ص = ٢٦ عندما س = ٤

∵ $\text{ص} = \int (٣\text{س}^{٢} - ١٨\text{س} + ٢٤)\, \text{ءس}$ ⇐ $\text{ص} = \text{س}^{٣} - ٩\text{س}^{٢} + ٢٤\text{س} + \text{ث}$

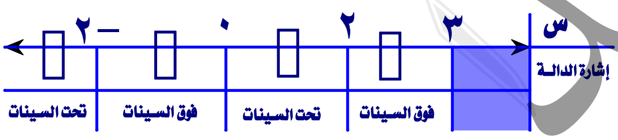
$٢٦ = ٤^{٣} - ٩ \times ٤^{٢} + ٢٤ \times ٤ + \text{ث}$ ⇐ $\text{ث} = ١٠$

$\text{ص} = \text{س}^{٣} - ٩\text{س}^{٢} + ٢٤\text{س} + ١٠$

القيمة العظمى المحلية $= (٢)^{٣} - ٩ \times (٢)^{٢} + ٢٤ \times ٢ + ١٠ = ٣٠$

----

(١٠) ∵ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٣}$



∴ أصفار الدالة $\text{س}^{٣} = ٠$ ⇐ $\text{س} = ٠$

ندرس إشارة الدالة فى الفترة [−٢ ، ٢]

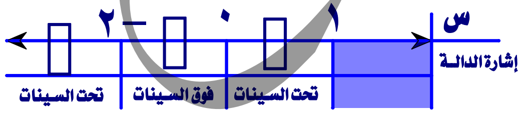
∴ المساحة $\text{م} = \int_{-٢}^{٢} |\text{د}(\text{س})|\, \text{ءس}$ ⇐ $\text{م} = \int_{-٢}^{٠} (-\text{س}^{٣})\, \text{ءس} + \int_{٠}^{٢} (\text{س}^{٣})\, \text{ءس}$

∴ $\text{م} = \left[\frac{-\text{س}^{٤}}{٤}\right]_{-٢}^{٠} + \left[\frac{\text{س}^{٤}}{٤}\right]_{٠}^{٢}$ ⇐ $\text{م} = ٤ + ٤ = ٨$ وحدة طول مربعة

----

(١١) نوجد التقاطع مع محور السينات : $\text{س}^{٣} - ٤\text{س} = ٠$ ⇐ $\boxed{\text{س} = ٠}$ ، $\boxed{\cancel{\text{س} = ٢}}$ ∉ للمجال ، $\boxed{\text{س} = -٢}$

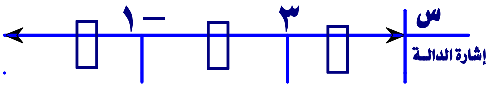
ندرس إشارة الدالة : كما فى الشكل المجاور



∴ المساحة المطلوبة $\text{م} = \int_{-٢}^{٠} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} = \int_{-٢}^{٠} (\text{س}^{٣} - ٤\text{س})\, \text{ءس} = ٤$ وحدة طول مربعة

----

(١٢) $\text{ص} = 0$ يعنى محور السينات ، نوجد التقاطع مع محور السينات : $3 + 2\text{س} - \text{س}^2 = 0 \Leftarrow \boxed{\text{س} = 3}$ ، $\boxed{\text{س} = -1}$



$\therefore$ المساحة $= \int_{-1}^{4} |3 + 2\text{س} - \text{س}^2| \, \text{ءس}$

$\therefore$ المساحة $= \int_{-1}^{3} (3 + 2\text{س} - \text{س}^2)\,\text{ءس} + \int_{3}^{4} (-3 - 2\text{س} + \text{س}^2)\,\text{ءس} = \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = 13$ وحدة طول مربعة

----

(١٣) نوجد نقط تقاطع المنحنيين: $\text{س}^3 - 3\text{س}^2 + 5 = \text{س} + 2$

$\therefore \text{س}^3 - 3\text{س}^2 - \text{س} + 3 = 0 \quad \Leftarrow \quad \text{س}^2(\text{س} - 3) - (\text{س} - 3) = 0$

$\therefore (\text{س} - 3)(\text{س}^2 - 1) = 0 \quad \Leftarrow \quad (\text{س} - 3)(\text{س} + 1)(\text{س} - 1) = 0$

$\therefore \boxed{\text{س} = 3}$ ، $\boxed{\text{س} = 1}$ ، $\boxed{\text{س} = -1}$

$\therefore \text{م} = \int_{-1}^{1} [\text{د(س)} - \text{ر(س)}]\,\text{ءس} + \int_{1}^{3} [\text{ر(س)} - \text{د(س)}]\,\text{ءس}$ $\boxed{\begin{array}{c}\text{د}(0) > \text{ر}(0) \\ \text{ر}(2) > \text{د}(2)\end{array}}$

$\therefore \text{م} = \int_{-1}^{1} (\text{س}^3 - 3\text{س}^2 + 5 - \text{س} - 2)\,\text{ءس} + \int_{1}^{3} (\text{س} + 2 - \text{س}^3 + 3\text{س}^2 - 5)\,\text{ءس}$

$\therefore \text{م} = \int_{-1}^{1} (\text{س}^3 - 3\text{س}^2 - \text{س} + 3)\,\text{ءس} + \int_{1}^{3} (\text{س} - \text{س}^3 + 3\text{س}^2 - 3)\,\text{ءس} = 8$ وحدة طول مربعة

----

(١٤) تكلفة الممر الواحد = مساحة الممر × تكلفة المتر الواحد من الجرانيت

مساحة الممر = مساحة المنطقة المحدودة بمنحى الدالة ، المستقيمان $\text{س} = 0$ ، $\text{ص} = 0$

نوجد تقاطع الدالة مع محور السينات : $12 - \frac{1}{3}\text{س}^2 = 0 \quad \Leftarrow \quad \text{س} = 6$ ، $\cancel{\text{س} = -6}$

مساحة الممر $= \int_{0}^{6} (12 - \frac{1}{3}\text{س}^2)\,\text{ءس} = \left[12\text{س} - \frac{1}{9}\text{س}^3\right]_{0}^{6} = 48$

تكلفة الممرات الخمس $= 5 \times 48 \times 400 = 96000$ جنيه

----

(١٥) ليكن $\text{ص}_1 = \sqrt{\text{س}}$ ، $\text{ص}_2 = \text{س}^2$

نوجد الإحداثى السينى لنقط تقاطع المنحنيين : $\sqrt{\text{س}} = \text{س}^2 \quad \Leftarrow \quad \text{س} = \text{س}^4$

$\therefore \text{س} - \text{س}^4 = 0 \quad \Leftarrow \quad \text{س}(1 - \text{س}^3) = 0 \quad \Leftarrow \quad \boxed{\text{س} = 0}$ ، $\boxed{\text{س} = 1}$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{٠}^{١} \left[ص_{١}^{٢} - ص_{٢}^{٢} \right] ءس$ $\Leftarrow$ الحجم $= \pi \int_{٠}^{١} (س - س^{٤})\, ءس$

$\therefore$ الحجم $= \pi \left[\frac{١}{٢} س^{٢} - \frac{١}{٥} س^{٥} \right]_{٠}^{١} = \frac{٣}{١٠}\pi$ وحدة طول مكعبة.

---

(١٦) نوجد الإحداثى الصادى لنقط تقاطع المنحنيين : $٢س + ٤ - س^{٢} = ٤$ $\Leftarrow$ $س = ٠$ ، $س = ٢$

بالتعويض فى أى من المعادلتين : $\boxed{ص = ٤}$ ، $\boxed{ص = ٠}$ " حدود التكامل"

لتكن $ص = ٤ - س_{١}^{٢}$ ، $٢س_{٢} + ص = ٤$ $\Leftarrow$ $س_{١}^{٢} = ٤ - ص$ ، $س_{٢}^{٢} = ٤ - ٢ص + \frac{١}{٤}ص^{٢}$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{٠}^{٤} \left[س_{١}^{٢} - س_{٢}^{٢} \right] ءص$ $\Leftarrow$ الحجم $= \pi \int_{٠}^{٤} (٤ - ص - ٤ + ٢ص - \frac{١}{٤}ص^{٢})\, ءص$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{٠}^{٤} (ص - \frac{١}{٤}ص^{٢})\, ءص = \pi \left[\frac{١}{٤}ص^{٢} - \frac{١}{١٢}ص^{٣} \right]_{٠}^{٤} = \frac{٨}{٣}\pi$ وحدة طول مكعبة.

---

(١٧) نوجد الإحداثى السينى لنقط تقاطع المنحنى مع محور السينات بوضع ص = ٠ : $\boxed{س = أ}$ ، $\boxed{س = -أ}$ " حدود التكامل"

$\because \frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$ $\Leftarrow$ $ص^{٢} = ب^{٢} \left(١ - \frac{س^{٢}}{أ^{٢}} \right)$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{-أ}^{أ} ص^{٢}\, ءس$ $\Leftarrow$ الحجم $= \pi \int_{-أ}^{أ} ب^{٢} \left(١ - \frac{س^{٢}}{أ^{٢}} \right) ءس$

$\therefore$ الحجم $= ٢\pi ب^{٢} \int_{٠}^{أ} \left(١ - \frac{١}{أ^{٢}} س^{٢} \right) ءس$ $\Leftarrow$ الحجم $= ٢\pi ب^{٢} \left[س - \frac{١}{٣أ^{٢}} س^{٣} \right]_{٠}^{أ}$

$\therefore$ الحجم $= ٢\pi ب^{٢} \left(أ - \frac{١}{٣أ^{٢}} \times أ^{٣} \right)$ $\Leftarrow$ الحجم $= ٢\pi ب^{٢} \left(أ - \frac{١}{٣}أ \right) = \frac{٤}{٣}\pi أ ب^{٢}$
